

Convocatoria ordinaria de 2021

Resolución completa de los ocho ejercicios, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Ejercicio 1

La división de $ax^2 + bx + 2$ entre $x - 1$ da como asíntota oblicua $y = ax + (a + b)$. Su pendiente es 2, luego $a = 2$. Como pasa por $(1, 1)$, su ordenada en el origen es -1 , así que $a + b = -1$ y $b = -3$. Por tanto, $\boxed{a = 2, b = -3}$.

Ejercicio 2

La continuidad en 0 exige que el límite del segundo tramo coincida con el valor del primero, que es -6 . Para que $\sin x - ax$ no tenga un término de orden x , debe ser $a = 1$. Entonces $\sin x - x = -x^3/6 + o(x^3)$ y el límite del segundo tramo vale -6 , como se requiere. Así, $\boxed{a = 1}$.

En $x = -1$, $f(-1) = -9/e$ y $f'(x) = (3x - 3)e^x$, por lo que $f'(-1) = -6/e$. La tangente es

$$\boxed{y + \frac{9}{e} = -\frac{6}{e}(x + 1)}.$$

Ejercicio 3

La función es polinómica, así que su dominio es $\mathbb{R}$. Derivando,

$$f'(x) = 4x^2(3 - x).$$

Es positiva para $x < 3$ (salvo en $x = 0$, donde se anula sin cambiar de signo) y negativa para $x > 3$. Por ello crece en $(-\infty, 3)$ y decrece en $(3, +\infty)$; tiene máximo en $(3, 27)$. Sus ceros son $x = 0$ y $x = 4$; el recinto acotado con el eje x está entre ellos, y la función es positiva en $(0, 4)$. El área es

$$S = \int_0^4 (4x^3 - x^4) dx = \left[x^4 - \frac{x^5}{5} \right]_0^4 = \boxed{\frac{256}{5}}.$$

Ejercicio 4

Por el teorema fundamental del cálculo, $F'(x) = 2x + \sqrt{x}$. Además,

$$F(1) = \int_0^1 (2t + \sqrt{t}) dt = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

La pendiente de la tangente en $x = 1$ es $F'(1) = 3$. La recta tangente queda

$$\boxed{y - \frac{5}{3} = 3(x - 1)}.$$

Ejercicio 5

La matriz de coeficientes tiene determinante $-3m(2m+5)$. Si $m \neq 0, -5/2$, el sistema es SCD. Para $m = 0$, la reducción deja $x = 2/5$ y $y - z/2 = 1/2$, de modo que los rangos coinciden y valen $2 < 3$: es SCL. En particular, todas sus soluciones tienen $x = 2/5$, así que no existe una solución con $x = 0$. Para $m = -5/2$, un menor de orden dos no se anula y una combinación de las ecuaciones produce una igualdad imposible; por ello los rangos son 2 y 3 y el sistema es SI.

Ejercicio 6

Sean b, g, d los números de botellas, garrafas y bidones por hora. Convertimos los kilogramos a gramos: se usan $50b + 100g + 1000d = 10000$. Las otras condiciones son $b = 2g$ y $b + g + d = 52$. Sustituyendo $b = 2g$ y $d = 52 - 3g$ en la primera,

$$100g + 100g + 1000(52 - 3g) = 10000,$$

por lo que $g = 15$, $b = 30$ y $d = 7$. Se producen $\boxed{30}$ botellas, $\boxed{15}$ garrafas y $\boxed{7}$ bidones cada hora.

Ejercicio 7

Un vector director de r , intersección de planos con normales $(2, -3, 1)$ y $(-3, 2, 2)$, es $(-8, -7, -5)$. Un plano perpendicular a s toma como normal el director $(-2, 1, 2)$ de esa recta. Al pasar por $P = (1, 0, -5)$,

$$-2(x - 1) + y + 2(z + 5) = 0,$$

es decir, $\boxed{-2x + y + 2z + 12 = 0}$.

Para el ángulo entre r y π , usamos que el seno del ángulo entre una recta de director $\vec{v}$ y un plano de normal $\vec{n}$ es $|\vec{v} \cdot \vec{n}|/(|\vec{v}||\vec{n}|)$. Aquí el producto escalar tiene valor absoluto 1, $|\vec{v}| = \sqrt{138}$ y $|\vec{n}| = 3$. Por tanto,

$$\sin \theta = \frac{1}{3\sqrt{138}}.$$

Ejercicio 8

La recta r se escribe $(x, y, z) = (-3, -4, 3) + t(2, 2, 3)$ y s pasa por $P = (1, 0, 2)$ con director $(a - 1, 1, -2)$. Igualando coordenadas con parámetros t, u , las componentes y, z dan $u = -4 + 2t$ y $3 + 3t = 2 - 2u$, de donde $t = 1$ y $u = -2$. La coordenada x da $-1 = 1 - 2(a - 1)$, así que $a = 2$. El punto de corte es

$$\boxed{(-1, -2, 6)}.$$