

Resolución completa de los ocho ejercicios con desarrollo y resultados exactos.

### Ejercicio 1

El dominio es  $\mathbb{R}$ . La derivada

$$f'(x) = e^x(x+1)^2 \geq 0$$

indica que la función es creciente en toda la recta (aunque  $f'(-1) = 0$ ). La segunda derivada es  $f''(x) = e^x(x+1)(x+3)$ . Su signo es positivo en  $(-\infty, -3)$  y  $(-1, \infty)$ , y negativo en  $(-3, -1)$ . Hay puntos de inflexión en  $x = -3, -1$ , con valores  $10/e^3$  y  $2/e$ . Por tanto, la función es convexa en  $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$  y cóncava en  $(-3, -1)$ .

### Ejercicio 2

La continuidad en 0 exige que el límite izquierdo  $a$  coincida con  $f(0) = 0$ , así que  $a = 0$ . Para la derivabilidad igualamos las derivadas laterales:

$$f'_-(0) = -a - b = -b, \quad f'_+(0) = 1 + 1 = 2.$$

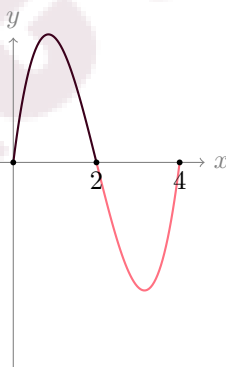
De aquí  $b = -2$ . La función vale cero en el punto y su derivada es 2, así que la tangente es  $y = 2x$  y la normal, de pendiente  $-1/2$ , es  $y = -x/2$ . En conclusión,  $\boxed{a = 0, b = -2}$ .

### Ejercicio 3

Factorizamos  $f(x) = x(x-2)(x-4)$ ; los cortes con el eje  $X$  son 0, 2, 4, y con el eje  $Y$ , el origen. El signo es positivo en  $(0, 2)$  y negativo en  $(2, 4)$ . Por eso la suma de las áreas acotadas es

$$S = \int_0^2 f(x)dx - \int_2^4 f(x)dx.$$

Con primitiva  $F(x) = x^4/4 - 2x^3 + 4x^2$ , ambas áreas valen 4. Así,  $\boxed{S = 8}$ .



### Ejercicio 4

Hacemos  $t = e^x$ ,  $dx = dt/t$ . La integral queda

$$\int \frac{t^3 - 1}{t(t-3)} dt = \int \left( t + 3 + \frac{26}{3(t-3)} + \frac{1}{3t} \right) dt.$$

Integramos término a término y volvemos a  $x$ :

$$\boxed{\frac{e^{2x}}{2} + 3e^x + \frac{26}{3} \ln |e^x - 3| + \frac{x}{3} + C}.$$

### Ejercicio 5

Usando la multiplicatividad del determinante,

$$\det(((AB)^5)^{-1}) = \frac{1}{(\det A \det B)^5}.$$

Aquí  $\det A = 9$  y  $\det B = -1/9$ , luego  $\det(AB) = -1$  y el primer determinante es  $\boxed{-1}$ . Para el segundo, el determinante de  $27AB^6$  incluye el factor  $27^3$ , porque la matriz es de orden tres:

$$\det(27AB^6) = 27^3 \det A (\det B)^6 = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

La ecuación  $AXB = 9I$  se despeja multiplicando por  $A^{-1}$  y  $B^{-1}$ :

$$X = 9A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & -63 \\ 9 & 0 & -162 \end{pmatrix}.$$

### Ejercicio 6

Calculamos

$$\det A = -(a-2)(3a-1).$$

Si  $a \neq 2, 1/3$ , el rango es 3. Para  $a = 2$  el rango es 2; para  $a = 1/3$  también es 2. Con  $a = 2$ , las ecuaciones son  $x + z = 1$ ,  $2x + 2z = 2$  y  $5x + 5y = 4$ . La segunda repite la primera y la tercera impone  $x + y = 4/5$ . Tomando  $z = t$ , queda

$$(x, y, z) = \left(1 - t, t - \frac{1}{5}, t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

### Ejercicio 7

Parametrizamos  $r$  como  $(-1+2t, 2+2t, 3-t)$ , con director  $d = (2, 2, -1)$ . El punto más próximo a  $P$  corresponde a que el vector desde  $P$  sea perpendicular a  $d$ ; por proyección,

$$t = \frac{d \cdot (P - (-1, 2, 3))}{d \cdot d} = \frac{9}{9} = 1.$$

El punto es  $\boxed{(1, 4, 2)}$ . La distancia al cuadrado desde  $P$  a un punto de la recta es  $9(t-1)^2 + 41$ . Igualándola a 50 obtenemos  $t = 0$  o  $t = 2$ , y los puntos son

$$\boxed{(-1, 2, 3) \quad \text{y} \quad (3, 6, 1)}.$$

### Ejercicio 8

Dos vectores normales son  $n_1 = (4, 3, 1)$  y  $n_2 = (1, -1, 1)$ . Una recta paralela a ambos planos debe tener un director perpendicular a ambos normales; tomamos

$$n_1 \times n_2 = (4, -3, -7).$$

Al pasar por el origen, la recta en forma paramétrica es

$$(x, y, z) = t(4, -3, -7), \quad t \in \mathbb{R}.$$