

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan ambas para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

Sea x la longitud del alambre destinado al rectángulo. El resto, $2 - x$, se emplea en el cuadrado, por lo que $0 \leq x \leq 2$. Si la altura del rectángulo es h , su base es $2h$ y su perímetro es $6h = x$; así, $h = x/6$ y su área vale

$$A_r = (2h)h = 2 \left(\frac{x}{6} \right)^2 = \frac{x^2}{18}.$$

El lado del cuadrado es $(2 - x)/4$, pues su perímetro es $2 - x$. La suma de áreas que queremos minimizar es, por tanto,

$$A(x) = \frac{x^2}{18} + \frac{(2 - x)^2}{16}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Derivamos y buscamos los puntos críticos del intervalo:

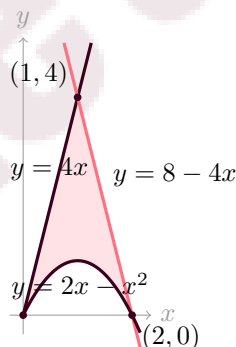
$$A'(x) = \frac{x}{9} - \frac{2 - x}{8} = 0 \iff 17x = 18 \implies x = \frac{18}{17}.$$

Este valor pertenece al dominio y $A''(x) = \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{17}{72} > 0$, de modo que corresponde a un mínimo. Las longitudes son

$$\frac{18}{17} \text{ m para el rectángulo,} \quad 2 - \frac{18}{17} = \frac{16}{17} \text{ m para el cuadrado.}$$

Opción A - Ejercicio 2

Primero localizamos los puntos que delimitan el recinto en el primer cuadrante. Las rectas se cortan en $(1, 4)$. La parábola $y = 2x - x^2$ corta el eje x en $(0, 0)$ y $(2, 0)$; estos puntos son también sus intersecciones con las rectas respectivas $y = 4x$ y $y = 8 - 4x$. El contorno queda formado por los dos segmentos de recta y el arco de parábola:



En $0 \leq x \leq 1$, la recta $y = 4x$ queda por encima de la parábola. En $1 \leq x \leq 2$, la recta $y = 8 - 4x$ es la frontera superior. Restamos en cada tramo la función inferior para calcular el área:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 (4x - (2x - x^2)) dx + \int_1^2 ((8 - 4x) - (2x - x^2)) dx \\ &= \int_0^1 (2x + x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 6x + 8) dx \\ &= \left[x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_1^2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2 & k \\ k+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_k^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 2 & k+1 \\ 1 & 2 & k & 3 \\ k+1 & 1 & 1 & k+2 \end{array} \right).$$

Calculando el determinante,

$$\det A_k = k^3 + k^2 - 6k = k(k+3)(k-2).$$

Si $k \neq 0, -3, 2$, el determinante es distinto de cero, luego $\text{rg}(A_k) = \text{rg}(A_k^*) = 3$, igual al número de incógnitas. Por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado.

Para $k = 0, -3, 2$ el determinante se anula. Comprobamos en cada caso que el rango es 2 y que el sistema es compatible:

- Si $k = 0$, el menor de las dos primeras filas y columnas x, y vale $2 \neq 0$, y una familia de soluciones es $(x, y, z) = (1 - 2t, 1 + t, t)$.
- Si $k = -3$, ese menor vale $5 \neq 0$, y $(x, y, z) = (t, t, t - 1)$ satisface las tres ecuaciones.
- Si $k = 2$, el menor de las filas primera y tercera y columnas x, y vale $-5 \neq 0$, y $(x, y, z) = (1, t, 1 - t)$ satisface el sistema.

En cada uno de estos casos, $\text{rg}(A_k) = \text{rg}(A_k^*) = 2 < 3$. Por Rouché-Frobenius son sistemas compatibles indeterminados, con más de una solución. Por tanto,

$k \in \{-3, 0, 2\}$ da más de una solución; no hay ningún valor de k sin solución.

Para $k = 0$, la solución pedida es la familia

$$(x, y, z) = (1 - 2t, 1 + t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes exactamente cuando el determinante que forman es cero:

$$\det \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & k \end{pmatrix} = k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1).$$

Así, son dependientes para $k = 1$ o $k = -1$.

Para que $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{v} - \vec{w}$ sean ortogonales, su producto escalar debe ser cero. Como

$$\vec{u} + \vec{v} = (k + 2, 2, -1), \quad \vec{v} - \vec{w} = (1, 0, -2 - k),$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = k + 2 + 2 + k = 2(k + 2),$$

la condición se cumple si y solo si $k = -2$.

Para $k = -1$, $\vec{v} = (2, 1, -2)$ y $\vec{w} = (1, 1, -1)$. Un vector perpendicular a ambos es su producto vectorial, $\vec{v} \times \vec{w} = (1, 0, 1)$. Al normalizarlo obtenemos los dos vectores unitarios buscados:

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1).$$

Opción B - Ejercicio 1

El argumento del logaritmo puede escribirse como

$$x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

por lo que el dominio es todo $\mathbb{R}$. Derivamos para estudiar el crecimiento y los extremos:

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+3} - 1 = -\frac{x(x+1)}{x^2+3x+3}.$$

El denominador es siempre positivo. Los puntos críticos son $x = -1$ y $x = 0$; el signo de f' en los intervalos determinados por ellos es negativo, positivo y negativo, respectivamente. Por tanto, f decrece en $(-\infty, -1)$, crece en $(-1, 0)$ y vuelve a decrecer en $(0, +\infty)$. Así,

$$f(-1) = 1, \quad f(0) = \ln 3,$$

y hay un mínimo relativo en $(-1, 1)$ y un máximo relativo en $(0, \ln 3)$.

En $x = -2$, $f(-2) = 2$ y $f'(-2) = -2$. La recta normal tiene pendiente opuesta e inversa, $m_n = 1/2$. Usando la ecuación punto-pendiente,

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 2) \implies y = \frac{x}{2} + 3.$$

Opción B - Ejercicio 2

Como la función tiene un extremo relativo en $x = 1$, su derivada debe anularse allí. Para $f(x) = ax^2 + b \ln x$,

$$f'(x) = 2ax + \frac{b}{x}, \quad f'(1) = 2a + b = 0,$$

de donde $b = -2a$. Usamos ahora la integral dada y las primitivas $x^3/3$ y $x \ln x - x$:

$$\begin{aligned} \int_1^4 f(x) dx &= a \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 + b [x \ln x - x]_1^4 \\ &= 21a + b(4 \ln 4 - 3). \end{aligned}$$

Sustituyendo $b = -2a$ e igualando al dato del enunciado,

$$a(27 - 8 \ln 4) = 27 - 8 \ln 4.$$

Como $27 - 8 \ln 4 \neq 0$, se obtiene $a = 1$ y $b = -2$. Por tanto,

$$(a, b) = (1, -2).$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz A es invertible porque

$$\det A = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 5 = 13 \neq 0.$$

Sea $C = AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$. Como $\det C = (-2) \cdot 3 - 7 = -13 \neq 0$ y $\det(AB) = \det A \det B$, también B es invertible (de hecho, $\det B = -1$).

Para resolver la ecuación, multiplicamos por A a la izquierda, operación válida porque A es invertible:

$$A^{-1}X - B = BA \implies X - AB = ABA.$$

Usando $AB = C$, queda $X = C + CA$. Calculamos este producto por separado:

$$CA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 36 & -11 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$X = C + CA = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 43 & -8 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

La recta, en forma paramétrica, es

$$r: \quad x = 1 + 4t, \quad y = 2 - 2t, \quad z = 3 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

El plano en forma general es $x - 2y + 2z - 1 = 0$. La distancia de un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ a un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

En el punto de la recta correspondiente al parámetro t , el numerador del plano vale

$$|(1 + 4t) - 2(2 - 2t) + 2(3 + t) - 1| = |2 + 10t|,$$

y el denominador es $\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$. Igualamos la distancia a 4:

$$\frac{|2 + 10t|}{3} = 4 \implies 2 + 10t = \pm 12,$$

de donde $t = 1$ o $t = -\frac{7}{5}$. Sustituyendo en la recta, los puntos buscados son

$$(5, 0, 4) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{23}{5}, \frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right).$$