

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan ambas para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

Sea w la anchura del rectángulo y h su altura. El perímetro exterior incluye la base, los dos lados verticales y el arco de una semicircunferencia de radio $w/2$; no incluye el diámetro, que queda dentro del marco. Por tanto,

$$w + 2h + \pi \frac{w}{2} = 10 \implies h = 5 - \frac{w}{2} - \frac{\pi w}{4}.$$

El área es la del rectángulo más la del semicírculo:

$$A(w) = wh + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{w}{2}\right)^2 = 5w - \frac{4+\pi}{8}w^2.$$

Como $w > 0$ y $h > 0$, el ancho pertenece a $0 < w < 20/(2+\pi)$. La función área es una parábola cóncava, pues $A''(w) = -(4+\pi)/4 < 0$; por ello su punto crítico interior da el máximo:

$$A'(w) = 5 - \frac{4+\pi}{4}w = 0 \implies w = \frac{20}{4+\pi}.$$

Al sustituir en la expresión de h , obtenemos $h = 10/(4+\pi)$. Así, el marco de área máxima tiene

anchura $\frac{20}{4+\pi}$ m,	altura rectangular $\frac{10}{4+\pi}$ m.
-------------------------------	--

El radio del semicírculo es también $10/(4+\pi)$ m, y el área máxima vale $50/(4+\pi)$ m².

Opción A - Ejercicio 2

Las curvas se cortan cuando $\sqrt{x} = bx$, con $x \geq 0$. Además de $x = 0$, al dividir por $\sqrt{x}$ para $x > 0$ resulta $x = 1/b^2$. Entre esos puntos la curva $y = \sqrt{x}$ queda por encima de la recta $y = bx$, por lo que el área es

$$\mathcal{A} = \int_0^{1/b^2} (\sqrt{x} - bx) dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{b}{2}x^2 \right]_0^{1/b^2} = \frac{1}{6b^3}.$$

Igualamos al área indicada, $4/3$:

$$\frac{1}{6b^3} = \frac{4}{3} \implies b^3 = \frac{1}{8}.$$

Como se pide $b > 0$, concluimos que

$b = \frac{1}{2}.$

Opción A - Ejercicio 3

El determinante de A es el de su bloque inferior derecho, ya que la primera fila y columna solo aportan el elemento 1:

$$\det A = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Por tanto, no existe ningún valor real de λ para el que A carezca de inversa.

Para $\lambda = 1$, de $A^{-1}XA = B$ despejamos X multiplicando a la izquierda por A y a la derecha por A^{-1} :

$$X = ABA^{-1}.$$

Calculamos por separado los factores necesarios:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$X = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Opción A - Ejercicio 4

De $x - y - 2 = 0$ y $z = 0$ obtenemos la recta en forma paramétrica

$$r: \quad x = t, \quad y = t - 2, \quad z = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para que un punto de r esté a distancia 3 de $P = (1, -1, 1)$, aplicamos la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$(t - 1)^2 + ((t - 2) - (-1))^2 + (0 - 1)^2 = 3^2.$$

Las dos primeras diferencias son $t - 1$, así que $2(t - 1)^2 + 1 = 9$. De aquí, $t = 3$ o $t = -1$, que dan

$$(3, 1, 0) \quad \text{y} \quad (-1, -3, 0).$$

Para el área del triángulo ABP , formamos dos vectores con origen en A :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 0, 1), \quad \overrightarrow{AP} = P - A = (0, -1, 1).$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial:

$$\mathcal{A}_{ABP} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\| = \frac{1}{2} \|(1, 1, 1)\| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Sea f la función definida a trozos. Para que sea derivable en el intervalo abierto, las ramas deben tener el mismo valor y la misma derivada en el punto de unión $x = 2$.

$$2 - \ln 2 + a = 2b + 1 - \ln 2 \implies a = 2b - 1.$$

Las derivadas laterales en $x = 2$ son $1 - 1/2 = 1/2$ y b , respectivamente. La igualdad de derivadas da $b = 1/2$ y, usando la condición de continuidad, $a = 0$. Por tanto,

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{2}.$$

Para estos valores, en $[1/e, 2]$ la derivada es $1 - 1/x$; es negativa hasta $x = 1$ y positiva después. En $(2, 4]$ la función es $x/2 + 1 - \ln 2$, que es creciente y enlaza continuamente con la primera rama. Así, hay un mínimo absoluto en $x = 1$, de valor $f(1) = 1$. Para el máximo comparamos los extremos del dominio:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = 1 + \frac{1}{e}, \quad f(4) = 3 - \ln 2.$$

Como $3 - \ln 2 \approx 2.307 > 1 + 1/e \approx 1.368$, el máximo absoluto se alcanza en $x = 4$. En conclusión,

$$\min f = 1 \text{ en } x = 1, \quad \max f = 3 - \ln 2 \text{ en } x = 4.$$

Opción B - Ejercicio 2

Integramos $f(x) = x(1 - \ln x) = x - x \ln x$. Para el segundo término usamos integración por partes, con $u = \ln x$ y $dv = x dx$:

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

Por tanto, una primitiva general es

$$F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x + C.$$

La condición $F(1) = 1$ da $3/4 + C = 1$, de modo que $C = 1/4$. La primitiva pedida es

$$F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4}.$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada del sistema homogéneo son

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}, \quad A_t^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 & 0 \\ -2t-1 & 0 & t+3 & 0 \end{array} \right).$$

El determinante de A_t es

$$\det A_t = -t^2 + 3t - 2 = -(t-1)(t-2).$$

Si $t \neq 1, 2$, el determinante no se anula y $\text{rg}(A_t) = 3$. En $t = 1$ o $t = 2$ el rango baja como máximo a 2; comprobamos que en cada caso hay un menor de orden 2 no nulo:

$$t = 1: \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \quad t = 2: \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A_t) = 2$ en ambos casos. Como el sistema es homogéneo, siempre es compatible y la columna ampliada es nula, de modo que $\text{rg}(A_t^*) = \text{rg}(A_t)$. Por Rouché-Frobenius, si $t \neq 1, 2$ es compatible determinado, mientras que para $t = 1$ o $t = 2$ es compatible indeterminado, ya que el rango común es menor que las tres incógnitas. Por tanto, tiene más de una solución exactamente cuando

$$\boxed{t = 1 \text{ o } t = 2}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Tomando $z = t$ en las ecuaciones de r , obtenemos la recta en forma paramétrica

$$r: \quad x = 1 - t, \quad y = -t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

con vector director $\vec{v} = (-1, -1, 1)$ y punto $R_0 = (1, 0, 0)$. Para hallar el plano que contiene a r y a $P = (1, 1, -1)$, usamos el vector $\overrightarrow{R_0P} = (0, 1, -1)$. Un vector normal al plano es

$$\vec{v} \times \overrightarrow{R_0P} = (0, -1, -1),$$

por lo que, usando R_0 , la ecuación general del plano queda

$$\boxed{\pi: y + z = 0}.$$

La recta pedida debe tener un vector director perpendicular a $\vec{v}$ y paralelo al plano π . Un vector que cumple ambas condiciones es $\vec{w} = (-2, 1, -1)$, pues

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 2 - 1 - 1 = 0, \quad (0, 1, 1) \cdot \vec{w} = 1 - 1 = 0.$$

Como además debe pasar por P , su ecuación paramétrica es

$$\boxed{\ell: \quad x = 1 - 2s, \quad y = 1 + s, \quad z = -1 - s, \quad s \in \mathbb{R}.$$