

SÈRIE 5

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.
2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat. Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
3. En alguns casos, la solució final pot admetre expressions equivalents. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
5. Penalització per errades de càlcul o transcripció:
6. Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
7. En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
8. En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
9. Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.



1.

a)

Punts de tall: $-x^2 + x + 6 = -9x + 3x^2 \rightarrow 4x^2 - 10x - 6 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)}}{8} = \frac{10 \pm 14}{8} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Comprovem la posició de cadascuna de les corbes:

A $(-\frac{1}{2}, 3)$ comprovem que $f(x) > g(x)$ per a qualsevol $x \in (-\frac{1}{2}, 3)$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{1}{2}}^3 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^3 (-x^2 + x + 6 - (-9x + 3x^2)) dx = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^3 (-4x^2 + 10x + 6) dx = \left[-\frac{4}{3}x^3 + 5x^2 + 6x \right]_{-1/2}^3 = \\ &= \left((-36 + 45 + 18) - \left(-\frac{4}{24} + \frac{5}{4} - 3 \right) \right) = \left(27 - \left(-\frac{19}{12} \right) \right) = \boxed{\frac{343}{12} u^2} \end{aligned}$$

b)

Calculem la recta tangent a $f(x) = -x^2 + x + 6$ que passa pel punt $(-2,0)$:

El pendent ve donat per la derivada de la funció:

$$f'(x) = -2x + 1 \rightarrow f'(-2) = -2(-2) + 1 = 5$$

I passa pel punt $(-2,0) \rightarrow f(-2) = 0$

Així la recta tangent serà de la forma:

$$y = 5x + n \rightarrow 0 = 5(-2) + n \rightarrow n = 10$$

I tenim: $y = 5x + 10$

Per fer la representació gràfica observem que la recta $y = 5x + 10$ passa pels punts $(0,10)$ i $(-2,0)$.

La gràfica de la funció f és una paràbola amb les branques cap avall i el vèrtex en el punt de coordenades:

$$f(x) = -x^2 + x + 6 \rightarrow f'(x) = -2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{27}{4} \right)$$



I els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $(-2,0)$ i $(3,0)$ ja que:

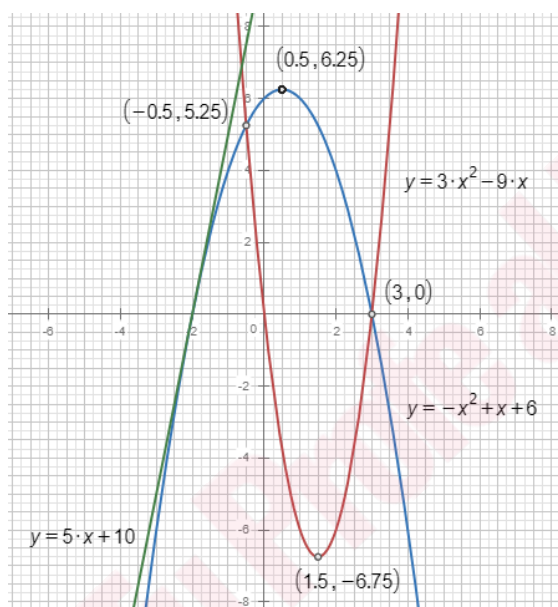
$$-x^2 + x + 6 = 0 \rightarrow x = -2 \text{ i } x = 3.$$

La gràfica de la funció g és una paràbola amb les branques cap amunt i el vèrtex en el punt de coordenades:

$$g(x) = -9x + 3x^2 \rightarrow g'(x) = -9 + 6x = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{4}\right)$$

I els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $(0,0)$ i $(3,0)$ ja que:

$$-9x + 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \text{ i } x = 3.$$



Pautes de correcció:

- a) 0,5 punts per calcular les abscisses dels punts de tall de les dues funcions.
0,25 punts per plantejar l'àrea demanada com una integral definida.
0,25 punts pel càlcul de la primitiva.
0,25 punts per aplicar correctament la regla de Barrow i donar el resultat final.
- b) 0,5 punts per l'equació de la recta tangent demanada.
0,75 punts per la representació gràfica de les tres gràfiques, 0,25 punts per la gràfica de la recta i 0,25 punts per cada una de les paràboles.



2.

a)

Apliquem el mètode de Gauss, així tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ 2 & k-1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Substituïm la fila 2, F2, per F2-F1, on F1 denota la primera fila, i la fila 3, F3, per F3-2F1, i obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ 2 & k-1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 0 & k+1 & 1-k & 4 \\ 0 & k+1 & 2-2k & 4 \end{array}\right)$$

Substituïm F3 per F3 - F2 i s'obté

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 0 & k+1 & 1-k & 4 \\ 0 & k+1 & 2-2k & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 0 & k+1 & 1-k & 4 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \end{array}\right)$$

Distingim casos:

- $k \neq -1, k \neq 1$ tenim rang $M = \text{rang } MA = \text{número incògnites} = 3$ i per tant és un sistema compatible determinat (M denota la matriu del sistema i MA la matriu ampliada).
- $k = 1$ obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tenim rang $M = \text{rang } MA = 2$ i per tant és un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

- $k = -1$ obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Fem un pas més canviant la F3 per F3-F2 i obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

que correspon a un sistema incompatible ja que rang $MA = 3 > \text{rang } M = 2$.



b)

Recuperem els càlculs de l'apartat anterior.

Per a $k = 1$ obtenim $y = 2$ i $x = 1 - z$, per tant les solucions són de la forma $(x, y, z) = (1 - z, 2, z)$ o bé forma $(x, y, z) = (x, 2, 1 - x)$.

Per a $k = 0$ obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

I després de fer Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

I, per tant, la solució és $z = 0, y = 4$ i $x = 3$.

Pautes de correcció:

- a) 0,25 punts per la forma matricial del sistema.
0,5 punts per determinar els diferents casos que cal estudiar, sigui pel mètode de Gauss o pel càlcul de rangs per determinants.
0,75 punts pels tres casos (0,25 punts per cada cas).
- b) 0,5 punts per donar les solucions del cas $k = 0$.
0,5 punts per donar les solucions del cas $k = 1$.

3.

a)

Determinem el vector director i un punt de cada recta:

$$r: x = -y = z + m \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -1, 1) \\ P(0, 0, -m) \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 1, 0) \times (1, 0, -1) = (-1, 1, -1) \\ x = 1 \Rightarrow Q(1, 0, 1) \end{array} \right.$$

Com que $\vec{v}_r = \vec{v}_s$ els vectors directors de r i s són linealment dependents i les rectes seran o bé coincidents o bé paral·leles. Si són coincidents tenen tots els punts en comú, en concret $Q \in s$.

Comprovem si $Q \in r: 1 \neq -0 = 1 + m$

Com que no se satisfà per cap valor de m , podem assegurar que les rectes sempre seran paral·leles independentment de m .

b)

Calculem la distància entre les dues rectes:

$$d(P, S) = \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1+m \end{vmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{|(1+m, m, -1)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(1+m)^2 + m^2 + 1}}{\sqrt{3}}$$

Calculem el valor de m per tal que sigui $\sqrt{2}$:

$$d(P, S) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(1+m)^2 + m^2 + 1} = \sqrt{2}\sqrt{3} \Leftrightarrow (1+m)^2 + m^2 + 1 = 6 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 4 = 0$$

D'on s'obtenen les solucions $m = 1$ i $m = -2$.

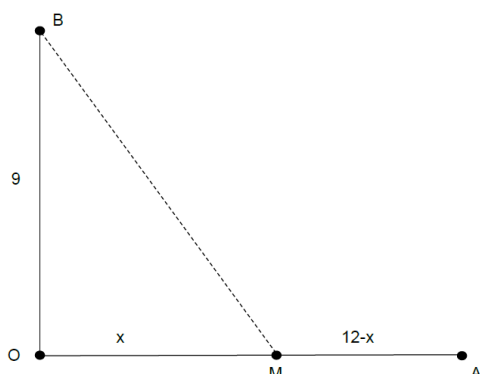
Pautes de correcció:

- a) 0,75 punts per determinar que les rectes són coincidents o paral·leles.
0,5 punts per justificar que són paral·leles per tot m .
- b) 0,75 punts per obtenir correctament la distància entre les dues rectes.
0,5 punts per resoldre correctament l'equació i determinar els dos valors de m .



4.

Si denotem per x la distància de l'encreuament a la torre, és a dir, $x = d(O, M)$, aleshores obtenim



Pel teorema de Pitàgores veiem que $d(B, M) = \sqrt{81 + x^2}$.

Així doncs el preu del cablejat serà vindrà donat per la funció

$$P(x) = 125(12 - x) + 250\sqrt{81 + x^2}.$$

Per trobar el preu mínim derivem la funció P :

$$P'(x) = -125 + 250 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{81 + x^2}}$$

Resolent $P'(x) = 0$ obtenim $\sqrt{81 + x^2} = 2x$, i elevant les dues bandes al quadrat tenim

$81 + x^2 = 4x^2$, que té com a solució real positiva $x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ km. Per comprovar que és un mínim estudiem el signe de la derivada als intervals $(0, 3\sqrt{3})$ i $(3\sqrt{3}, 12)$. En el primer cas $P'(x) < 0$ i en el segon cas $P'(x) > 0$, per tant deduïm que el mínim de la funció P s'assoleix per a $x = 3\sqrt{3}$ km, és a dir, situant la torre a $3\sqrt{3}$ km = 5,2 km de l'encreuament.

Pautes de correcció:

- 0,5 punts pel plantejament del problema.
- 0,5 punts per determinar la funció cost que cal optimitzar.
- 0,5 punts pel càlcul de la derivada primera.
- 0,5 punts per determinar el candidat a mínim.
- 0,25 punts per justificar que, efectivament, correspon a un mínim.
- 0,25 punts pel valor del cost mínim.



5.

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b)

Calculem el quadrat d'una matriu de la família $\mathcal{S}$ i imposem que doni la matriu identitat:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veiem que cal $2ab = 0$ i $a^2 + b^2 = 1$. Veiem que hi ha 4 solucions: $a = 0$ i $b = \pm 1$ i $a = \pm 1, b = 0$. Per tant les 4 matrius possibles són:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pautes de correcció:

- a) 0,75 punts pel càlcul de la matriu inversa.
0,5 punts pel producte de matrius.
- b) 0,5 punts pel càlcul de A^2 .
0,25 punts per donar les dues equacions per calcular a i b .
0,5 punts per les quatre matrius que són solució.



6.

a)

La funció derivada de $f(x)$ és $f'(x) = \frac{-x^2 + (2a-2b)x + 1}{(x^2+1)^2}$

Imposem la condició d'extrem relatiu $f'(-1) = 0 \rightarrow \frac{-1+2b-2a+1}{4} = 0 \rightarrow a = b$

Imposem que la funció passi pel punt $P = \left(-2, \frac{13}{5}\right)$

$$f(-2) = \frac{13}{5} \rightarrow \frac{4a - 2 + b}{5} = \frac{13}{5} \rightarrow 4a + b = 15$$

D'on es dedueix $a = b = 3$

b)

Per $a = b$ la derivada és $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

Resolem $f'(x) = 0$ per trobar els possibles extrems relatius i obtenim $x = 1$, $x = -1$.

Com que $f'(-2) < 0$, $f'(0) > 0$, $f'(2) < 0$ deduïm que la funció té un mínim relatiu en $x = -1$ i un màxim relatiu en $x = 1$.

Pautes de correcció:

- a) 0,25 punts pel càlcul de la funció derivada.
0,25 punts per imposar la condició d'extrem i trobar una primera condició pels paràmetres.
0,25 punts per imposar que passi pel punt donat i trobar una segona condició.
0,5 punts per trobar els valors dels paràmetres a i b .
- b) 0,25 punts per donar la funció derivada en el cas demanat.
0,5 punts per trobar els dos candidats a extrems.
0,5 punts per donar i justificar on fa un mínim i on fa un màxim.