

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria extraordinaria de coincidencias de 2023

Se desarrollan las ocho preguntas. En la prueba basta con contestar a cuatro.

Pregunta A.1 - Condiciones con matrices

Sean

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c & 2a+4 \\ 4b+4c+2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Calculamos por separado los productos y la suma que aparecen en las condiciones:

$$AB = \begin{pmatrix} a+2b+2c & 2a+4 \\ 4b+4c+2 & 12 \end{pmatrix}, \quad A+B = \begin{pmatrix} a+1 & 4 \\ b+c+2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Como AB es simétrica, sus elementos fuera de la diagonal deben coincidir:

$$2a+4 = 4b+4c+2 \implies a+1 = 2b+2c.$$

La matriz $A+B$ no tiene inversa si su determinante es cero:

$$6(a+1) - 4(b+c+2) = 0 \implies 3a - 2b - 2c - 1 = 0.$$

Por último, en la condición $AB - C = I$, los elementos de la diagonal deben diferir en 1 y los de fuera de la diagonal deben coincidir. Tres de esas igualdades se verifican directamente con las expresiones anteriores; la entrada $(1, 1)$ aporta

$$a+2b+2c-c = 1 \implies a+2b+c = 1.$$

Resolvemos el sistema de condiciones:

$$\begin{cases} a+1 = 2b+2c, \\ 3a-2b-2c-1 = 0, \\ a+2b+c = 1. \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones se obtiene $a = 1$ y $b+c = 1$. La tercera queda $2+2b+c = 1$; junto con $b+c = 1$, resulta $b = -1$ y $c = 2$. **Conclusión.** Los valores son $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$.

Pregunta A.2 - Optimización de un depósito cilíndrico

Sean $r > 0$ el radio de la base y $h > 0$ la altura, ambos en decímetros. El volumen fijo impone

$$\pi r^2 h = 432\pi \implies h = \frac{432}{r^2}.$$

La filtración por la pared lateral es 10 cl por cada dm^2 , y por el suelo es 20 cl por cada dm^2 . El área lateral es $2\pi rh$, mientras que el área de la base es πr^2 . Así, la filtración total es

$$F(r) = 10(2\pi rh) + 20(\pi r^2) = 20\pi r \frac{432}{r^2} + 20\pi r^2 = \frac{8640\pi}{r} + 20\pi r^2.$$

Buscamos el mínimo para $r > 0$. Derivamos e igualamos a cero:

$$F'(r) = -\frac{8640\pi}{r^2} + 40\pi r = 0 \implies r^3 = 216 \implies r = 6.$$

Este punto es un mínimo, pues

$$F''(r) = \frac{17280\pi}{r^3} + 40\pi > 0 \quad (r > 0).$$

Con ese radio, la altura es

$$h = \frac{432}{6^2} = 12.$$

Conclusión. Para que la filtración sea mínima, el depósito debe tener radio 6 dm y altura 12 dm.

Pregunta A.3 - Posición relativa, plano y ángulo

Convertimos las rectas a forma paramétrica. Para r , el punto $(0, 1, 2)$ y el vector director $(1, -1, 1)$ dan

$$r: \quad x = t, \quad y = 1 - t, \quad z = 2 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En s , tomamos $z = u$; entonces $x = 1 - 2u$ e $y = 1 + u$:

$$s: \quad x = 1 - 2u, \quad y = 1 + u, \quad z = u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Sus vectores directores $(1, -1, 1)$ y $(-2, 1, 1)$ no son proporcionales. Para comprobar si se cortan, igualamos sus coordenadas. De $t = 1 - 2u$, $1 - t = 1 + u$ se obtiene $t = -1$, $u = 1$; la tercera coordenada también coincide. El punto común es $(-1, 2, 1)$. **Conclusión.** Las rectas son secantes y se cortan en $(-1, 2, 1)$.

b) Plano que contiene a ambas rectas

Tomamos sus vectores directores. Un vector normal al plano es el producto vectorial de ambos, pues resulta perpendicular a las dos direcciones:

$$(1, -1, 1) \times (-2, 1, 1) = (-2, -3, -1),$$

que podemos simplificar a $\vec{n} = (2, 3, 1)$. Usamos el punto de intersección $(-1, 2, 1)$ en la ecuación punto-normal:

$$2(x + 1) + 3(y - 2) + (z - 1) = 0 \implies 2x + 3y + z - 5 = 0.$$

Conclusión. El plano buscado es $2x + 3y + z - 5 = 0$.

c) Ángulo entre las rectas

El ángulo entre dos rectas es el ángulo agudo entre sus vectores directores. Aplicamos la relación del producto escalar:

$$\cos \theta = \frac{|(1, -1, 1) \cdot (-2, 1, 1)|}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Conclusión. El ángulo es $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

Pregunta A.4 - Probabilidad con un dado

El dado tiene nueve resultados equiprobables: $2, 3, \dots, 10$.

a) Obtener un número primo

Los primos entre 2 y 10 son 2, 3, 5, 7, cuatro resultados de nueve. **Conclusión.** La probabilidad es $\frac{4}{9}$.

b) Suma par en dos lanzamientos

La suma es par si los dos resultados tienen la misma paridad. Hay cinco resultados pares y cuatro impares; los dos lanzamientos son independientes:

$$P(\text{suma par}) = P(\text{par, par}) + P(\text{impar, impar}) = \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{41}{81}.$$

Conclusión. La probabilidad de que la suma sea par es $\frac{41}{81}$.

c) El primer resultado es primo, sabiendo que la suma es impar

Sea S el suceso «la suma es impar» y P el suceso «el primer resultado es primo». La probabilidad condicionada es

$$P(P | S) = \frac{P(P \cap S)}{P(S)}.$$

Contamos resultados ordenados, todos con probabilidad $1/81$. Para que la suma sea impar, debe salir primero un par y luego un impar, o al revés: hay $5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 40$ casos. Para que, además, el primer resultado sea primo, puede salir el 2 y después cualquiera de los cuatro impares (4 casos), o uno de los tres primos impares 3, 5, 7 y después uno de los cinco pares (15 casos). Hay 19 casos favorables.

$$P(P | S) = \frac{19/81}{40/81} = \frac{19}{40}.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es $\frac{19}{40}$.

Pregunta B.1 - Costes de la macedonia

Sean m, p, a los precios por kilogramo, en euros, de melocotón, pera y piña.

Si se utiliza la misma cantidad de cada fruta y hay 750 g en total, se emplean 0,25 kg de cada una. El coste da la primera ecuación. En el segundo preparado se usan 0,25 kg de melocotón; si la cantidad de pera es p_0 , la de piña es $p_0 + 0,1$ kg y $0,25 + p_0 + (p_0 + 0,1) = 0,75$, luego $p_0 = 0,2$ kg y se emplean 0,3 kg de piña. Por último, el coste del lote proporciona la tercera relación:

$$\begin{cases} 0,25m + 0,25p + 0,25a = 1,8, \\ 0,25m + 0,2p + 0,3a = 1,9, \\ 3000m + 3000p + 2000a = 18000. \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} m + p + a = 7,2, \\ 5m + 4p + 6a = 38, \\ 3m + 3p + 2a = 18. \end{cases}$$

Restando tres veces la primera ecuación de la tercera, resulta $-a = -3,6$, es decir, $a = 3,6$. Al sustituir en la primera y segunda:

$$m + p = 3,6, \quad 5m + 4p = 16,4.$$

De aquí $m = 2$ y $p = 1,6$. **Conclusión.** El kilogramo de melocotón cuesta 2 €, el de pera 1,60 € y el de piña 3,60 €.

Pregunta B.2 - Estudio de una función y área

La función $f(x) = x^4 - 4x - 1$ es polinómica, así que su dominio es $\mathbb{R}$.

a) Extremos relativos

La derivada permite estudiar el crecimiento:

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1).$$

La ecuación $f'(x) = 0$ tiene como única solución real $x = 1$, pues $x^3 = 1$. Para $x < 1$, $f'(x) < 0$, y para $x > 1$, $f'(x) > 0$; la función pasa de decrecer a crecer. Además, $f(1) = -4$. **Conclusión.** f tiene un mínimo relativo en $(1, -4)$ y no tiene máximos relativos.

b) Cero en $[0, 2]$

Al ser polinómica, f es continua en $[0, 2]$. Sus valores en los extremos son

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(2) = 16 - 8 - 1 = 7 > 0.$$

Por el teorema de Bolzano, una función continua que cambia de signo en un intervalo se anula al menos una vez en él. **Conclusión.** Existe al menos un $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

c) Número de raíces reales

El estudio de la derivada anterior muestra que f decrece hasta $x = 1$ y crece después. Además,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad f(1) = -4, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

En el intervalo $(-\infty, 1)$, la función decrece estrictamente desde $+\infty$ hasta -4 , así que cruza una sola vez el eje x . En $(1, +\infty)$, crece estrictamente desde -4 hasta $+\infty$, y vuelve a cruzarlo una sola vez. **Conclusión.** La ecuación $x^4 - 4x - 1 = 0$ tiene exactamente dos raíces reales.

d) Área entre f y la recta $y = -4x$

Los puntos de corte satisfacen

$$x^4 - 4x - 1 = -4x \iff x^4 = 1 \implies x = -1, 1.$$

En $[-1, 1]$, $x^4 - 1 \leq 0$, por lo que la recta está por encima de la curva. El área es

$$A = \int_{-1}^1 ((-4x) - f(x)) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = \left[x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{8}{5}.$$

Conclusión. El área encerrada es $\frac{8}{5}$ unidades cuadradas.

Pregunta B.3 - Distancia y volumen

Parametrizamos r tomando $z = t$. De las ecuaciones de la recta se obtiene $x = t + 4$ e $y = -2 - 2t$:

$$r : \quad x = 4 + t, \quad y = -2 - 2t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Su vector director es $\vec{d} = (1, -2, 1)$.

a) Distancia de A a r y punto más próximo

Un punto de r es $P(t) = (4 + t, -2 - 2t, t)$. El punto más próximo es la proyección ortogonal de A sobre r ; por eso el vector $A - P(t)$ debe ser perpendicular a $\vec{d}$. Con $A = (4, -3, 4)$,

$$A - P(t) = (-t, -1 + 2t, 4 - t).$$

Imponemos el producto escalar nulo:

$$(-t, -1 + 2t, 4 - t) \cdot (1, -2, 1) = -t + 2 - 4t + 4 - t = 6 - 6t = 0,$$

de donde $t = 1$ y $H = P(1) = (5, -4, 1)$. La distancia es

$$d(A, r) = \|A - H\| = \|(-1, 1, 3)\| = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}.$$

Conclusión. La distancia es $\sqrt{11}$, alcanzada en $H = (5, -4, 1)$.

b) Volumen del tetraedro

Un plano perpendicular a r tiene como vector normal un vector director de r , $(1, -2, 1)$. El plano que pasa por $A = (4, -3, 4)$ es

$$(x - 4) - 2(y + 3) + (z - 4) = 0 \iff x - 2y + z - 14 = 0.$$

Sus intersecciones con los ejes son $(14, 0, 0)$, $(0, -7, 0)$ y $(0, 0, 14)$. Junto con los tres planos coordenados delimitan un tetraedro cuyos lados sobre los ejes miden 14, 7 y 14. El volumen de un tetraedro trirrectángulo de interceptos a, b, c es $\frac{|abc|}{6}$; por tanto,

$$V = \frac{14 \cdot 7 \cdot 14}{6} = \frac{686}{3}.$$

Conclusión. El volumen del tetraedro es $\frac{686}{3}$ unidades cúbicas.

Pregunta B.4 - Probabilidad binomial y normal

a) Acierta tres de cuatro tiros

Cada tiro libre tiene probabilidad de acierto $p = 0,85$, y cada tiro desde el centro del campo tiene $p = 0,20$. En ambos casos son cuatro intentos independientes, así que usamos una binomial.

Para los tiros libres, $X \sim \text{Bin}(4, 0,85)$:

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} (0,85)^3 (0,15) = 0,368475.$$

Para los tiros desde el centro, $Y \sim \text{Bin}(4, 0,20)$:

$$P(Y = 3) = \binom{4}{3} (0,20)^3 (0,80) = 0,0256.$$

Los dos grupos de lanzamientos son independientes; por ello multiplicamos las probabilidades para que se cumplan simultáneamente ambos sucesos:

$$P(X = 3, Y = 3) = 0,368475 \cdot 0,0256 = 0,00943296.$$

Conclusión. Las probabilidades son 0,368475, 0,0256 y 0,00943296, respectivamente.

b) Falla al menos el 20 % de 200 tiros libres

Sea F el número de fallos. La probabilidad de fallar un tiro es $q = 1 - 0,85 = 0,15$, luego $F \sim \text{Bin}(200, 0,15)$. «Al menos el 20 %» significa $F \geq 40$.

Aproximamos la binomial por una normal de media y desviación típica

$$\mu = np = 30, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0,15 \cdot 0,85} = \sqrt{25,5} \approx 5,05.$$

Con corrección de continuidad,

$$P(F \geq 40) \simeq P(N \geq 39,5), \quad N \sim N(30, 5,05).$$

El valor tipificado es

$$z = \frac{39,5 - 30}{5,05} \approx 1,88.$$

Por simetría y con la tabla normal, $P(N \geq 39,5) \simeq 1 - \Phi(1,88) = 1 - 0,9699 = 0,0301$. **Conclusión.** La probabilidad aproximada de que falle al menos 40 tiros es 0,0301, aproximadamente un 3,01 %.