

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Calcular los valores $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{cases}, \text{ donde } X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}. \quad (3,3 \text{ puntos})$$

Solución:

Resolvemos el sistema planteado por reducción, multiplicamos la 2ª ecuación por (-2)

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ -2AX + 2AY = -2C \end{cases}$$

$$-AY = B - 2C \rightarrow AY = 2C - B \rightarrow (\text{si existe } A^{-1}) Y = A^{-1}(2C - B)$$

multiplicamos la 2ª ecuación por (-3)

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ -3AX + 3AY = -3C \end{cases}$$

$$-AX = B - 3C \rightarrow AX = 3C - B \rightarrow (\text{si existe } A^{-1}) X = A^{-1}(3C - B)$$

Veamos si existe A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0 \quad \text{luego existe } A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{luego } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos las matrices X e Y

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[3 \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -33 & -90 \\ 19 & 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -99+95 & -270+265 \\ -33+38 & -90+106 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[2 \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48+45 & -180+175 \\ -16+18 & -60+70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$x_1 = -4 \quad x_2 = -5 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 16 \quad y_1 = -3 \quad y_2 = -5 \quad y_3 = 2 \quad y_4 = 10$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Se considera el plano $\pi : y + z - 12m = 0$ (m parámetro real) y la rectas

$$u : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}, \quad v : \begin{cases} x = 2 \\ y = 2z \end{cases}, \quad w : \begin{cases} x = 3 \\ y = 3z \end{cases}.$$

Sean A, B y C los puntos de intersección de π con u , v y w , respectivamente.

- Calcular las coordenadas de A, B y C en función de m (1,8 puntos)
- Hallar los valores de m para los que el área del triángulo ABC es 1 u.a. (1,5 puntos)

Solución:

a)

$$A : \pi \cap u \rightarrow \begin{cases} y + z - 12m = 0 \\ x = 1 \\ y = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z + z - 12m = 0 \\ 2z = 12m \\ z = 6m \end{cases} \rightarrow A(1, 6m, 6m)$$

$$B : \pi \cap v \rightarrow \begin{cases} y + z - 12m = 0 \\ x = 2 \\ y = 2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2z + z - 12m = 0 \\ 3z = 12m \\ z = 4m \end{cases} \rightarrow B(2, 8m, 4m)$$

$$C : \pi \cap w \rightarrow \begin{cases} y + z - 12m = 0 \\ x = 3 \\ y = 3z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3z + z - 12m = 0 \\ 4z = 12m \\ z = 3m \end{cases} \rightarrow C(3, 9m, 3m)$$

b) El área del triángulo ABC se obtiene a partir de la fórmula

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2m, -2m) \quad \overrightarrow{AC} = (2, 3m, -3m)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2m & -2m \\ 2 & 3m & -3m \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2m & -2m \\ 3m & -3m \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -2m \\ 2 & -3m \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2m \\ 2 & 3m \end{vmatrix} = \vec{i} 0 - \vec{j} (-3m + 4m) + \vec{k} (3m - 4m) = \\ &= (0, -m, -m) \end{aligned}$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{0^2 + (-m)^2 + (-m)^2} = \sqrt{2m^2}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \sqrt{2m^2} \rightarrow 1 = \frac{1}{2} \sqrt{2m^2} \rightarrow 2 = \sqrt{2m^2} \rightarrow 4 = 2m^2 \rightarrow m^2 = 2 \rightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

Como hemos resuelto una ecuación irracional, $2 = \sqrt{2m^2}$ debemos comprobar las soluciones

$$m = \sqrt{2} \quad 2 = \sqrt{2(\sqrt{2})^2} \rightarrow 2 = \sqrt{4} \quad \text{Sí. Solución válida}$$

$$m = -\sqrt{2} \quad 2 = \sqrt{2(-\sqrt{2})^2} \rightarrow 2 = \sqrt{4} \quad \text{Sí. Solución válida}$$

$$\text{Soluciones: } m_1 = \sqrt{2} \quad m_2 = -\sqrt{2}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Dadas las curvas $y = (x - 1)^3$, $y = 5 - x^2$ calcular razonadamente:

a) Su punto de corte (1,1 puntos). b) El área encerrada por ellas y el eje OY (2,2 puntos).

Solución:

a) Calculamos el punto de corte resolviendo la ecuación $(x - 1)^3 = 5 - x^2$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 5 - x^2$$

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0; \text{ buscamos soluciones por Ruffini}$$

2	1	-2	3	-6	Una solución $x = 2$ Resolvemos $x^2 + 3 = 0$; $x^2 = -3$ No tiene soluciones reales
		2	0	6	
	1	0	3	0	

Ambas curvas se cortan en el punto de abscisa $x = 2$

$y = 5 - 2^2 = 1$; el punto de corte de las curvas es $(2, 1)$

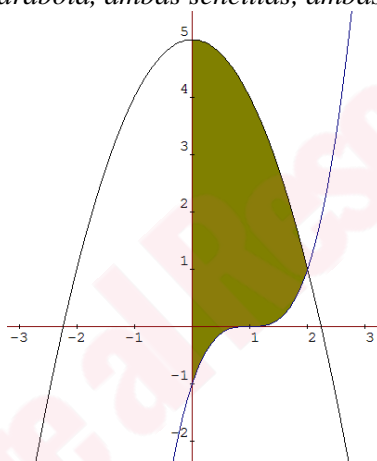
b) Para calcular el área pedida hacemos una representación gráfica aproximada,

$y = (x - 1)^3$ es una cúbica e $y = 5 - x^2$ es una parábola, ambas sencillas, ambas pasan por $(2, 1)$

$y = (x - 1)^3$ $y = 5 - x^2$ El área a calcular es

la zona pintada del gráfico:

El cálculo mediante la integral definida entre 0 y 2 de la parábola menos la cúbica.



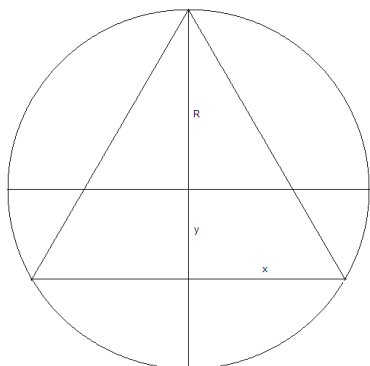
$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 [(5 - x^2) - (x - 1)^3] dx = \int_0^2 [(5 - x^2) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)] dx = \int_0^2 [5 - x^2 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1] dx = \\
 &= \int_0^2 [-x^3 + 2x^2 - 3x + 6] dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 6x \right]_0^2 = \frac{-16}{4} + \frac{16}{3} - \frac{12}{2} + 12 = -4 + \frac{16}{3} - 6 + 12 = \frac{16}{3} + 2 = \\
 &= \frac{22}{3} \text{ u. a.}
 \end{aligned}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4.1. Probar que el volumen de cualquier cono recto inscrito en una esfera es menor que el 30% del volumen de la misma (3,3 puntos).

Solución:

Al inscribir un cono en una esfera, los volúmenes de ambos cuerpos son, llamando R al radio de la esfera,



$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \pi x^2 (y + R)$$

$$\text{siendo } x^2 + y^2 = R^2, \quad x, y > 0$$

despejando x^2 , expresamos el volumen del cono en función de y , $x^2 = R^2 - y^2$, luego

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \pi (R^2 - y^2) (y + R) = \frac{1}{3} \pi (R^3 + R^2 y - R y^2 - y^3)$$

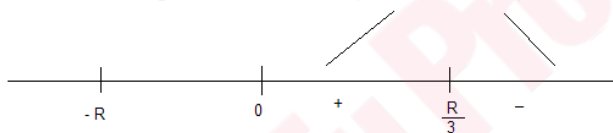
Busquemos el mayor cono recto que podemos inscribir en la esfera de radio R ,

$$V' = \frac{1}{3} \pi (R^2 - 2R y - 3y^2)$$

$$V' = 0 \rightarrow \frac{1}{3} \pi (R^2 - 2R y - 3y^2) = 0 \rightarrow R^2 - 2R y - 3y^2 = 0$$

$$3y^2 + 2R y - R^2 = 0 \rightarrow y = \frac{-2R \pm \sqrt{(2R)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-R^2)}}{6} = \frac{-2R \pm \sqrt{4R^2 + 12R^2}}{6} = \frac{-2R \pm 4R}{6} = \begin{cases} y_1 = \frac{2R}{6} = \frac{R}{3} \\ y_2 = \frac{-6R}{6} = -R \end{cases}$$

Puesto que los valores de y deben ser positivos, estudiamos el signo de V' en R^+ , como V' es un polinomio de 2º grado con coeficiente de y^2 negativo, obtenemos



Para $y = R/3$ V alcanza un máximo relativo; por ser V creciente en el intervalo $(0, R/3)$ y decreciente en $(R/3, +\infty)$ este máximo es absoluto. Es decir que el mayor cono recto que podemos inscribir en una esfera de radio R es aquel cuyo volumen es:

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \pi \left(R^2 - \left(\frac{R}{3} \right)^2 \right) \left(\frac{R}{3} + R \right) = \frac{1}{3} \pi \left(R^2 - \frac{R^2}{9} \right) \left(\frac{4R}{3} \right) = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{9R^2 - R^2}{9} \right) \left(\frac{4R}{3} \right) = \frac{1}{3} \pi \frac{8R^2}{9} \frac{4R}{3} = \frac{32}{81} \pi R^3$$

Comprobemos que con el mayor cono recto inscrito en la esfera se cumple la condición del problema,

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{32}{81} \pi R^3$$

$$\text{¿} V_{\text{cono}} < \frac{30}{100} V_{\text{esfera}} \text{?}$$

$$\frac{32}{81} < \frac{30}{100} \frac{4}{3} \rightarrow \frac{32}{81} < \frac{10}{25} \rightarrow 0.395 < 0.4 \quad \text{Sí}$$

Como el volumen del mayor cono recto que podemos inscribir en la esfera cumple la condición del problema, cualquier cono recto inscrito en una esfera la cumple.

EJERCICIO A

PROBLEMA 4.2. Cien alumnos prepararon un examen de matemáticas. Se representa por x el número de problemas hecho por cada alumno en la preparación y por y la calificación obtenida. Sabiendo que las medias aritméticas de esas variables fueron: $\bar{x} = 9,2$ e $\bar{y} = 7,5$, que el coeficiente de correlación entre esas variables fue 0,7 y que la desviación típica de la variable y fue el doble que la de la variable x , se pide obtener, razonadamente:

- Las ecuaciones de las rectas de regresión de y sobre x y de x sobre y (2 puntos).
- La calificación que la adecuada recta de regresión predice para un alumno que sólo hizo 6 problemas durante la preparación del examen (1,3 puntos).

Solución:

a) Los datos del problema son,

$x = n^{\circ}$ de problemas $y =$ calificación obtenida

$$\bar{x} = 9,2 \quad \bar{y} = 7,5 \quad \rho = 0,7 \quad \sigma_y = 2 \sigma_x$$

Sabemos que $\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ y que la recta de regresión de y sobre x es $y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (x - \bar{x})$

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \frac{\sigma_y}{2}} = 2 \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 2 \cdot 0,7 = 1,4$$

La recta de regresión de y sobre x será: $y - 7,5 = 1,4 (x - 9,2)$

La recta de regresión de x sobre y es $x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} (y - \bar{y})$

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{2 \sigma_x \sigma_y} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1}{2} 0,7 = 0,35$$

La recta de regresión de x sobre y será: $x - 9,2 = 0,35 (y - 7,5)$

b) Un alumno hizo 6 problemas, conocemos el valor de $x = 6$, obtendremos su calificación utilizando la recta de regresión de y sobre x .

$$y - 7,5 = 1,4 (6 - 9,2)$$

$$y - 7,5 = 1,4 (-3,2)$$

$$y - 7,5 = -4,48$$

$$y = 7,5 - 4,48 = 3,02$$

La calificación que cabe esperar para este alumno es 3,02

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. El sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + \alpha y + \alpha^2 z = 1 \\ x + \alpha y + \alpha z = \alpha \\ x + \alpha^2 y + \alpha^2 z = \alpha^2 \end{cases}$$
 depende del parámetro real α .

Discutir para que valores de α es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado (2 puntos), y resolverlo en las casos compatibles (1,3 puntos).

Solución:

a) La matriz ampliada de este sistema es

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Tanto la matriz de coeficientes (A) como la ampliada A' tienen como rango máximo 3; empezamos estudiando el rango de A.

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^2 - \alpha^3 - \alpha^3 - \alpha^3 = \alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2$$

Veamos para que valores del parámetro el determinante es nulo, resolvemos la ecuación

$$\alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2 = 0 \rightarrow \alpha^2(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 0 \rightarrow \alpha = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \rightarrow (\alpha - 1)^2 = 0 \rightarrow \alpha - 1 = 0 \rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

Para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ hay un menor de orden 3 no nulo, luego $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3 = n^\circ$ de incógnitas Sistema compatible determinado.

Para $\alpha = 0$ el menor de orden 3 de A es nulo, el rango de A será como máximo 2, estudiemos los rangos de A y A'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Como las tres filas de A son iguales, } \text{rang}(A) = 1$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Consideramos el menor} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0 \quad \text{por lo que } \text{rang}(A') = 2$$

luego $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A')$ Sistema incompatible.

Para $\alpha = 1$ igual que en el caso anterior el menor de orden 3 de A es nulo. Estudiemos los rangos de A y A' .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Como las tres filas de A son iguales, } \text{rang}(A) = 1$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Como las tres filas de } A' \text{ son iguales, } \text{rang}(A') = 1$$

luego $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 1 < n^\circ$ de incógnitas, Sistema compatible indeterminado

En resumen, para $\alpha = 0$ Sistema Incompatible,
para $\alpha = 1$ Sistema Compatible Indeterminado,
para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ Sistema Compatible Determinado.

Resolución

Para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ Sistema Compatible Determinado.

Lo resolvemos por Cramer, $|A|$ ya lo calculamos en el apartado a) $|A| = \alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^2(\alpha - 1)^2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha - 1)^2} = \frac{0}{\alpha^2(\alpha - 1)^2} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha - 1)^2} = \frac{\alpha(\alpha^2 + \alpha^3 + 1 - \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha)}{\alpha^2(\alpha - 1)^2} = \frac{\alpha(\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1)}{\alpha^2(\alpha - 1)^2} = \frac{\alpha(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)}{\alpha^2(\alpha - 1)^2} = \frac{\alpha + 1}{\alpha}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 - 1) = (\alpha - 1)(\alpha - 1)(\alpha + 1) = (\alpha - 1)^2(\alpha + 1)$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha - 1)^2} = \frac{\alpha(\alpha^2 + \alpha + \alpha - 1 - \alpha^2 - \alpha^2)}{\alpha^2(\alpha - 1)^2} = \frac{\alpha(-\alpha^2 + 2\alpha - 1)}{\alpha^2(\alpha - 1)^2} = \frac{-\alpha(\alpha - 1)^2}{\alpha^2(\alpha - 1)^2} = \frac{-1}{\alpha}$$

En los cálculos anteriores como $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ podemos simplificar por α y $\alpha - 1$

Para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ la solución del sistema es $x = 0$ $y = \frac{\alpha + 1}{\alpha}$ $z = \frac{-1}{\alpha}$

Para $\alpha = 1$ Sistema Compatible Indeterminado.

Para este valor de α , el sistema queda reducido a la ecuación:

$$x + y + z = 1$$

Podemos despejar cualquiera de las incógnitas, despejando x quedará $x = 1 - y - z$

$$\text{Solución } \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Hallar las ecuaciones de los planos que pasan por el punto $(-7, 2, -3)$ y tales que las proyecciones perpendiculares del origen sobre dichos planos son puntos de la recta $(x,y,z)=(0,4,1)+t(1,0,0)$ (3,3 puntos).

Solución:

Los datos del problema son: recta $r: (x,y,z)=(0,4,1) + t(1,0,0) = (t, 4, 1)$ y el punto $Q(-7, 2, -3)$

Llamamos π a los planos buscados.

Las proyecciones perpendiculares del origen sobre π son puntos de la recta r , serán de la forma $P(t, 4, 1)$

Consideramos los vectores: $PQ(t+7, 2, 4)$ y $OP(t, 4, 1)$

PQ es un vector contenido en el plano π y OP es perpendicular a π , luego $PQ \cdot OP = 0$

$$(t+7, 2, 4) \cdot (t, 4, 1) = 0; \quad t^2 + 7t + 8 + 4 = 0; \quad t^2 + 7t + 12 = 0; \quad t = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} t_1 = -3 \\ t_2 = -4 \end{cases}$$

Para $t = -3$,	$OP = (-3, 4, 1)$ y OP es perpendicular a π , la ecuación de π será: $-3x + 4y + z = D$ como el punto Q es de π , $-3(-7) + 4 \cdot 2 - 3 = D$; $21 + 8 - 3 = D$; $D = 26$ La ecuación de π es: $-3x + 4y + z = 26 \rightarrow 3x - 4y - z = -26 \rightarrow$ $3x - 4y - z + 26 = 0$
Para $t = -4$,	$OP = (-4, 4, 1)$ y OP es perpendicular a π , la ecuación de π será: $-4x + 4y + z = D$ como el punto Q es de π , $-4(-7) + 4 \cdot 2 - 3 = D$; $28 + 8 - 3 = D$; $D = 33$ La ecuación de π es: $-4x + 4y + z = 33 \rightarrow 4x - 4y - z = -33 \rightarrow$ $4x - 4y - z + 33 = 0$

Las ecuaciones de los planos pedidos son: $\pi_1: 3x - 4y - z + 26 = 0$ y $\pi_2: 4x - 4y - z + 33 = 0$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Hallar las constantes reales a y b para que $f(x) = \begin{cases} x \ln x + a & \text{si } x > 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin \pi x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

sea una función continua para todo valor real x (3,3 puntos).

Solución:

Para $x < 0$ $f(x)$ está definida como $\frac{\sin \pi x}{x}$ que es continua ya que el denominador no se anula.

Para $x > 0$ $f(x)$ está definida como $x \ln x + a$ que es continua ya que $\ln x$ es continua para $x > 0$.

Veamos si es continua para $x = 0$. Deben cumplirse tres condiciones,

- 1) $\exists f(0)$
- 2) $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 3) $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Veamos cada una de ellas,

1) $f(0) = b$, por definición de $f(x)$; luego existe $f(0)$

2) Para calcular este límite como la función tiene definiciones distintas a la izquierda y a la derecha del 0, debemos estudiar los límites laterales,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \pi x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right)^{(m)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi \cos \pi x}{1} = \pi$$

(m) como las funciones $\sin \pi x$ y x (numerador y denominador del límite a calcular) son derivables para todo valor real, en particular lo son en intervalos $(x, 0)$, resolvemos la indeterminación aplicando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + a) = (0(-\infty) + a)$$

En primer lugar resolvemos la indeterminación obtenida transformándola en un cociente en el que podamos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = (0(-\infty)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^{(n)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

Como las funciones $\ln x$ y $\frac{1}{x}$ son derivables en intervalos $(0, x)$ podemos aplicar L'Hôpital.

$$\text{Por lo que } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + a) = 0 + a = a$$

$$\text{Finalmente } \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ cuando } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \rightarrow a = \pi$$

3) El valor de la función y el del límite deben coincidir, es decir, $b = a = \pi$

Para que $f(x)$ sea continua para todo valor real de x $a = b = \pi$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4.1 La concentración en sangre de un fármaco después de su toma es $C(t) = 0,29483 t + 0,04253 t^2 - 0,00035 t^3$ mg/ml, donde t es el tiempo transcurrido en minutos. Se pide:

- Calcular el periodo de tiempo durante el cual el fármaco actúa (1,8 puntos).
- Determinar en qué instante la concentración del fármaco es máxima (1,5 puntos).

Solución:

a) El fármaco actúa en el intervalo de tiempo en que $C(t) > 0$ para $t > 0$

Como $C(t)$ es una función polinómica buscamos los valores de $t / C(t) = 0$

$0,29483 t + 0,04253 t^2 - 0,00035 t^3 = 0$; sacando factor común t

$t(0,29483 + 0,04253 t - 0,00035 t^2) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = 0 \\ 0,29483 + 0,04253 t - 0,00035 t^2 = 0 \rightarrow t = \frac{-0,04253 \pm \sqrt{0,04253^2 - 4(-0,00035)0,29483}}{2(-0,00035)} = \\ \frac{-0,04253 \pm \sqrt{0,0022215629}}{-0,0007} = \frac{-0,04253 \pm 0,0471334}{-0,0007} = \left\{ \begin{array}{l} t_2 = 128,0906548 \\ t_3 = -6,576369131 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Estudiamos el signo de $C(t)$ en los dos intervalos positivos que hemos obtenido,

intervalo	t	C(t)
(0, 128'09)	1	0,33701 positivo
(128'09, +∞)	1000	-307175,17 negativo

Esto quiere decir que el periodo durante el cual el fármaco actúa es de 0 a 128,090 minutos

b) Para encontrar el instante en que la concentración del fármaco es máxima, buscamos los extremos relativos de $C(t)$.

$C'(t) = 0,29483 + 0,08506 t - 0,00105 t^2$

$$\begin{aligned} C'(t) = 0 \rightarrow t &= \frac{-0,08506 \pm \sqrt{0,08506^2 - 4(-0,00105)0,29483}}{2(-0,00105)} = \frac{-0,08506 \pm \sqrt{0,0084734896}}{-0,0021} = \\ &= \frac{-0,08506 \pm 0,0920515}{-0,0021} = \left\{ \begin{array}{l} t_1 = -3,329314 \\ t_2 = 84,33887 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$C''(t) = 0,08506 - 0,00105 t$

Para $t = -3,329314$; $C''(t) = 0,08506 - 0,00105(-3,329314) = 0,0885557$ positivo, luego en $t = -3,329314$ hay un mínimo relativo

Para $t = 84,33887$; $C''(t) = 0,08506 - 0,00105(84,33887) = -0,0034958$ negativo, luego en $t = 84,33887$ hay un máximo relativo

Como $C(t)$ es un polinomio de 3º grado, es una función continua; en los extremos del intervalo en que el fármaco actúa $C(0) = 0$, $C(128,090) = 0$ por lo que el máximo relativo que tiene $C(t)$ en $t = 84,33887$ es un máximo absoluto.

La concentración del fármaco es máxima al cabo de 84,33 minutos de su toma.

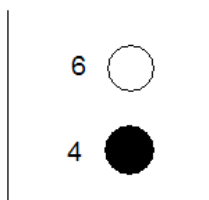
EJERCICIO B

PROBLEMA 4.2. De una urna que contiene 6 bolas blancas y 4 bolas negras se extraen bolas sucesivamente y sin devolución. Obtener razonadamente cuántas bolas hay que extraer para que:

- a) La probabilidad de sacar al menos una bola blanca sea $\frac{29}{30}$ (2,8 puntos).
 b) La probabilidad de sacar al menos una bola blanca sea 1 (0,5 puntos).

Solución:

Partimos de la urna



de la que realizamos extracciones sin devolución.

a) Llamamos A = sacar al menos una bola blanca, el suceso contrario será $A' =$ sacar todas negras

$P(A) = 1 - P(A')$; queremos que $1 - P(A') = 29/30$; $P(A') = 1 - 29/30 = 1/30$

nº de extracciones probabilidad

1	$P(A') = \frac{4}{10}$
2	$P(A') = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{4}{30}$
3	$P(A') = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$

Por lo tanto debemos sacar tres bolas.

b) Queremos que $P(A) = 1$;

Como la urna contiene 4 bolas negras, para que la probabilidad de sacar al menos una bola blanca sea 1 hay que sacar 5 o más bolas.