

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

La empresa TikiTak ha realizado un estudio del comportamiento de sus usuarios y ha observado que las $3/5$ partes de sus publicaciones reciben un “Like”. Juana es una usuaria de TikiTak. Se pide:

- 1.1 **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún “Like” si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?
- 1.2 **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos “Likes” en sus cuatro publicaciones?
- 1.3 **(1 punto)** Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un “Like” sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

L = la publicación recibe un “Like”

NL = la publicación no recibe un “Like”

De los datos del problema:

“ha observado que las $3/5$ partes de sus publicaciones reciben un “Like”” $\rightarrow P(L) = 3/5 = 0.6$,
luego $P(NL) = 1 - 0.6 = 0.4$

Consideramos la variable X = número de “Likes” recibidos en 4 publicaciones $\rightarrow X = B(4, 0.6)$

Este valor de p (0.6) no está en la tabla de la distribución binomial que tenemos. Contestaremos las cuestiones de forma directa.

- 1.1 ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún “Like” si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?

Debemos calcular $P(X = 0)$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} 0.6^0 0.4^4 = 0.0256$$

La probabilidad pedida es 0.0256.

- 1.2 ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos “Likes” en sus cuatro publicaciones?

Debemos calcular $P(X \leq 2)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.0256 + \binom{4}{1} 0.6^1 0.4^3 + \binom{4}{2} 0.6^2 0.4^2 = \\ &= 0.0256 + 0.1536 + 0.3456 = 0.5248 \end{aligned}$$

La probabilidad pedida es 0.5248.

1.3 Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un “Like” sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

Ahora consideramos $X = B(n, 0.6)$

Debemos calcular el menor valor de n de manera que $P(X \geq 1) > 0.999$.

$$P(X \geq 1) > 0.999; \quad 1 - P(X = 0) > 0.999; \quad 1 - 0.999 > P(X = 0); \quad 0.001 > P(X = 0); \quad P(X = 0) < 0.001$$

Para $n = 4$, del apartado 1.1 hemos calculado que $P(X = 0) = 0.0256 > 0.001$

$$\text{Para } n = 5, P(X = 0) = \binom{5}{0} 0.6^0 0.4^5 = 0.01024 < 0.001 \quad \text{no}$$

$$\text{Para } n = 6, P(X = 0) = \binom{6}{0} 0.6^0 0.4^6 = 0.004096 < 0.001 \quad \text{no}$$

$$\text{Para } n = 7, P(X = 0) = \binom{7}{0} 0.6^0 0.4^7 = 0.0016384 < 0.001 \quad \text{no}$$

$$\text{Para } n = 8, P(X = 0) = \binom{8}{0} 0.6^0 0.4^8 = 0.00065536 < 0.001 \quad \text{sí}$$

$$\text{Para } n = 9, P(X = 0) = \binom{9}{0} 0.6^0 0.4^9 = 0.000262144 < 0.001 \quad \text{sí}$$

Solución: el menor número de publicaciones es 8.

Para resolver el problema **utilizando la tabla** debemos cambiar de variable.

Consideramos la variable Y = número de “no Likes” recibidos en 4 publicaciones $\rightarrow Y = B(4, 0.4)$ y este valor de $p(0.4)$ si está en la tabla.

La relación entre las variables X e Y es:

X	0	1	2	3	4
Y	4	3	2	1	0

1.1 ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún “Like” si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?

Debemos calcular $P(X = 0)$

$$P(X = 0) = P(Y = 4) = P(Y \leq 4) - P(Y \leq 3) = 1 - 0.9744 = 0.0256$$

La probabilidad pedida es 0.0256.

1.2 ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos “Likes” en sus cuatro publicaciones?

Debemos calcular $P(X \leq 2)$

$$P(X \leq 2) = P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - 0.4752 = 0.5248$$

La probabilidad pedida es 0.5248.

1.3 Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un “Like” sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

Ahora consideramos $X = B(n, 0.6)$ e $Y = B(n, 0.4)$

Debemos calcular el menor valor de n de manera que $P(X \geq 1) > 0.999$.

La relación entre las variables X e Y es:

X	0	1	2	3	...	n
Y	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	...	0

$$P(X \geq 1) = P(Y \leq n-1) > 0.999$$

$$n=7, P(Y \leq 6) = 0.9984 > 0.999 \text{ no}$$

$$n=8, P(Y \leq 7) = 0.9993 > 0.999 \text{ sí}$$

$$n=9, P(Y \leq 8) = 0.9997 > 0.999 \text{ sí}$$

Solución: el menor número de publicaciones es 8.

Tu Profe al Rescate

2.1 Se dan las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Obtener:

2.1.1 **(1.25 puntos)** La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1} X)^{-1} = A (B^2 A)^{-1}$.

2.1.2 **(0.5 puntos)** El determinante de la matriz $(3A^5 B)^2$.

2.1.3 **(0.75 puntos)** Los valores de a y b , si existen, tales que $a B^{100} + b B^{99} = A + C$.

Solución:

2.1.1 ¿Matriz X ? / $(A^{-1} X)^{-1} = A (B^2 A)^{-1}$.

Considerando la siguiente propiedad de matrices:

$$(A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \rightarrow \begin{aligned} (A^{-1} X)^{-1} &= X^{-1} (A^{-1})^{-1} = X^{-1} A \\ (B^2 A)^{-1} &= A^{-1} (B^2)^{-1} \end{aligned}$$

Operemos con la expresión $(A^{-1} X)^{-1} = A (B^2 A)^{-1}$

$$X^{-1} A = A A^{-1} (B^2)^{-1}; \quad X^{-1} A = I (B^2)^{-1}; \quad X^{-1} A = (B^2)^{-1}$$

Multiplicando por la derecha por A^{-1} ,

$$X^{-1} A A^{-1} = (B^2)^{-1} A^{-1}; \quad X^{-1} I = (B^2)^{-1} A^{-1}; \quad X^{-1} = (B^2)^{-1} A^{-1};$$

Aplicando la propiedad anterior: $X^{-1} = (A B^2)^{-1}$, por lo tanto, $X = A B^2$.

$$\text{Calculemos } B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \rightarrow X = A B^2 = A I = A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$

2.1.2 Calcular $\left| (3 A^5 B)^2 \right|$

Considerando las propiedades de los determinantes: $|A B| = |A| |B|$ y $|n A| = n^2 |A|$ (por ser A 2×2)

$$\left| (3 A^5 B)^2 \right| = \left| 3 A^5 B \right|^2 = (-9)^2 = 81$$

$$\left| 3 A^5 B \right| = 3^2 |A|^5 |B| = 9 |A|^5 |B| = 9 I^5 (-1) = -9$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Solución: $\left| (3 A^5 B)^2 \right| = 81.$

2.1.3) ¿ a, b ? / $a B^{100} + b B^{99} = A + C$

Efectuemos los cálculos necesarios:

$$A + C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el apartado 2.1.1 hemos calculado que $B^2 = I$. Por tanto, de las potencias de B sabemos:

$$B^1 = B; \quad B^2 = I; \quad B^3 = B^2 B = I B = B; \quad B^4 = B^2 B^2 = I I = I; \quad \dots$$

Luego, para n impar $B^n = B$ y

$$\text{para } n \text{ par} \quad B^n = I$$

Por lo que $B^{100} = I$ y $B^{99} = B$

$$a B^{100} + b B^{99} = a I + b B = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$

Hay que resolver la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a+b & 2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 2b=0 \\ a-b=1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{de la 2ª ecuación: } b=0 \\ \text{sustituyendo en las otras dos:} \\ \begin{cases} a+0=1 \\ a-0=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=1 \end{cases} \rightarrow a=1 \end{array}$$

Finalmente, la solución de la ecuación matricial es $a = 1$ y $b = 0$.

Solución: $a = 1$ y $b = 0$.

2.2 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

Se pide:

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a .

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

Solución:

2.2.1

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 & a \end{array} \right)$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3. A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A' es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a - a^2 - a - 1 = -a^2 - 2a - 1 = -(a^2 + 2a + 1)$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0; \quad a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$$

Si $a \neq -1$

$|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$, y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $a = -1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A , $\left. \begin{array}{l} |a_{22}| = |-1| = -1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

En A' , a partir del menor no nulo de orden 2 anterior formamos el menor de orden 3 añadiéndole la 1ª fila y 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \{F_2 = -F_1\} = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < 3$ (número de incógnitas), luego el sistema es compatible indeterminado.

Solución, si $a \neq -1$, el sistema es compatible determinado;
si $a = -1$, el sistema es compatible indeterminado.

2.2.2 El sistema es compatible determinado para $a \neq -1$.

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ a x - y + z = a \\ a x + y = a \end{cases}$$

$$|A| = -(a^2 + 2a + 1) = -(a+1)^2, \quad \{a \neq -1 \rightarrow a+1 \neq 0\}$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{F_2 + F_1}{-(a+1)^2} = \frac{\begin{vmatrix} -a & -a & -1 \\ 0 & -a-1 & 0 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{(-a-1)a}{-(a+1)^2} = \frac{-(a+1)a}{-(a+1)^2} = \frac{a}{(a+1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & a & 1 \\ a & a & 0 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{F_2 + F_1}{-(a+1)^2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{-a(a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{a}{(a+1)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & -a \\ a & -1 & a \\ a & 1 & a \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{-a - a^2 - a^3 - a^2 - a + a^3}{-(a+1)^2} = \frac{-2a^2 - 2a}{-(a+1)^2} = \frac{-2a(a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{2a}{a+1}$$

Si $a \neq -1$, la solución es:
$$\begin{cases} x = \frac{a}{a+1} \\ y = \frac{a}{a+1} \\ z = \frac{2a}{a+1} \end{cases}$$

3.1 Dados los planos $\pi_1: x + 2y + mz = -1$, donde m es un parámetro real, y $\pi_2: x + z = 6$.

3.1.1 (0.5 puntos) Encontrar el valor de m , si existe, para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 (1.25 puntos) Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45 grados.

3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 .

Solución:

3.1.1 ¿ $m?$ / $\pi_1 \perp \pi_2$.

$\pi_1 \perp \pi_2$ si los vectores normales de los planos son perpendiculares $\left(\vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \right)$, por lo tanto el producto escalar de los dos vectores debe ser 0.

$$\vec{n}_{\pi_1} = (1, 2, m) \quad \text{y} \quad \vec{n}_{\pi_2} = (1, 0, 1)$$

$$\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = (1, 2, m) \cdot (1, 0, 1) = 1 + m; \quad 1 + m = 0; \quad m = -1$$

Solución: π_1 y π_2 son perpendiculares para $m = -1$.

3.1.2 ¿ $m?$ / los planos formen un ángulo de 45°

Los dos planos forman un ángulo de 45° cuando lo forman sus vectores normales.

$$\cos 45^\circ = \frac{\left| \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} \right|}{\left| \vec{n}_{\pi_1} \right| \cdot \left| \vec{n}_{\pi_2} \right|}; \quad \cos 45^\circ = \frac{\left| (1, 2, m) \cdot (1, 0, 1) \right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + m^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1+m|}{\sqrt{m^2+5} \sqrt{2}}; \quad (\sqrt{2})^2 \sqrt{m^2+5} = 2|1+m|; \quad 2\sqrt{m^2+5} = 2|1+m|; \quad \sqrt{m^2+5} = |1+m|$$

$$\text{elevando al cuadrado: } (\sqrt{m^2+5})^2 = (|1+m|)^2; \quad m^2+5 = (1+m)^2; \quad m^2+5 = 1+2m+m^2; \\ 2m-4=0; \quad 2m=4; \quad m=2$$

$$\text{Comprobación: } \sqrt{2^2+5} = |1+2|; \quad 3 = |3| \quad \text{sí.}$$

Solución: los planos π_1 y π_2 forman un ángulo de 45° para $m = 2$.

3.1.3 Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 .

Siendo r la recta intersección de π_1 y π_2 ,

$$r: \begin{cases} x + 2y + mz = -1 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$, resolvemos considerando x e y incógnitas principales

$$r: \begin{cases} x + 2y = -1 - mz \\ x = 6 - z \end{cases} \quad \text{sustituyendo el valor de } x \text{ (de la 2ª ecuación) en la 1ª: } 6 - z + 2y = -1 - mz;$$

$$\text{despejando } y: \quad 2y = -1 - mz - 6 + z; \quad 2y = -7 + (1 - m)z; \quad y = \frac{-7}{2} + \frac{1-m}{2}z$$

Solución: la ecuación de la recta intersección de los dos planos es: $r: \begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = \frac{-7}{2} + \frac{1-m}{2} \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Tu Profe al Rescate

3.2 Dado el plano $\pi: 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, -1)$ y $Q = (1, a, 1)$, calcular:

3.2.1 (1.25 puntos) Los valores del parámetro a , si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

Solución:

3.2.1 ¿ $a? / r \subset \pi$ siendo r la recta que pasa por P y Q .

Para que la recta r esté contenida en el plano π debe cumplirse que los puntos P y $Q \in \pi$

$$¿P \in \pi?, \quad 3 \cdot 0 + 1 - (-1) = 2; \quad 1 + 1 = 2 \quad \text{sí,}$$

$$¿Q \in \pi?, \quad 3 \cdot 1 + a - 1 = 2; \quad 2 + a = 2; \quad a = 0.$$

Por lo tanto, **la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π cuando $a = 0$.**

3.2.2 Calcular para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

El proceso del cálculo es:

1º) Recta, s , que pasa por Q y es perpendicular a π

$$\text{De la recta } s \text{ conocemos: } \begin{cases} \text{punto } Q(1,1,1) \\ \text{v. director, } r \perp \pi \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_\pi(3,1,-1) \end{cases}$$

$$\text{La ecuación paramétrica de } s, \quad s: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2º) Punto de corte entre s y π (M).

Sustituyendo los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano:

$$3(1 + 3\lambda) + (1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 2; \quad 3 + 9\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 2; \quad 11\lambda + 3 = 2; \quad 11\lambda = -1;$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{-1}{11}$$

$$\text{Sustituyendo este valor en la ecuación de la recta } s: \begin{cases} x = 1 + 3 \frac{-1}{11} = \frac{8}{11} \\ y = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \\ z = 1 - \frac{-1}{11} = \frac{12}{11} \end{cases}$$

$$\text{Entonces } M\left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right).$$

3º) El cálculo de Q' , el simétrico de Q , podemos realizarlo de dos formas.

a) Q' será tal que $\frac{Q + Q'}{2} = M$

$$\begin{aligned} Q + Q' = 2M &\rightarrow Q' = 2M - Q = 2\left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right) - (1, 1, 1) = \left(\frac{16}{11} - 1, \frac{20}{11} - 1, \frac{24}{11} - 1\right) = \\ &= \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right) \end{aligned}$$

b) ¿ $A \in r? / d(A, \pi) = d(Q, \pi)$

Como $A \in r \rightarrow A(1+3\lambda, 1+\lambda, 1-\lambda)$

$$d(Q, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 + 1 - 1 - 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$d(A, \pi) = \frac{1}{\sqrt{11}} \rightarrow \frac{|3(1+3\lambda) + 1 + \lambda - (1-\lambda) - 2|}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}}; \quad |11\lambda + 1| = 1;$$

$$|11\lambda + 1| = 1; \quad \begin{cases} 11\lambda + 1 = 1; & 11\lambda = 0; & \lambda = 0; & A(1, 1, 1) = Q \\ 11\lambda + 1 = -1; & 11\lambda = -2; & \lambda = -\frac{2}{11}; & A\left(1+3\frac{-2}{11}, 1+\frac{-2}{11}, 1-\frac{-2}{11}\right) = \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right) = Q' \end{cases}$$

Solución: $Q' \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11} \right).$

Tu Prof te al Rescate

4.1 Dada la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1},$$

se pide:

4.1.1 **(0.5 puntos)** Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.2 **(1.5 puntos)** Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.3 **(0.5 puntos)** Representar la función f .

Solución:

4.1.1

Dom $f(x)$,

$$x^2 + 1 = 0; \quad x^2 = -1; \quad x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

*Asíntotas,**verticales,**Como $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$, $f(x)$ no tiene asíntotas verticales.**horizontales,*

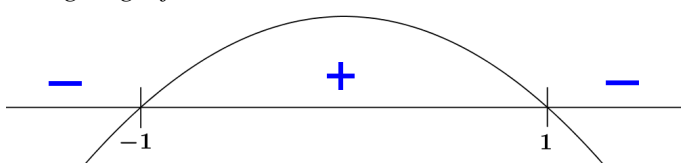
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow y = 0 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

*oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.***Por lo tanto, $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$ y sólo tiene asíntota horizontal que es $y = 0$.***Intervalos de crecimiento-decrecimiento.**Debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en su dominio.*

$$f'(x) = \frac{1(x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Como el denominador está elevado al cuadrado será positivo, luego el signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador. Obtengamos las raíces del numerador:

$$1 - x^2 = 0; \quad x^2 = 1; \quad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Como $1 - x^2$ es un polinomio de segundo grado con las raíces obtenidas y coeficiente de x^2 negativo, su signo gráficamente es:**Por tanto, $f(x)$ es creciente en $(-1, 1)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.**4.1.2) Máximos y mínimos relativos y absolutos de $f(x)$

$$f'(x) = 0; \quad \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0; \quad 1 - x^2 = 0; \quad x = \pm 1$$

*En $x = -1$ hay un mínimo relativo porque la función pasa de decreciente a creciente.**En $x = 1$ hay un máximo relativo porque la función pasa de creciente a decreciente.*

Para $x = -1$, $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = \frac{-1}{2}$, $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $\left(-1, \frac{-1}{2}\right)$,

Para $x = 1$, $f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$, $f(x)$ tiene un máximo relativo en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Podremos determinar los extremos absolutos, si los hay, cuando representemos la función.

Tras la representación (apartado siguiente) concluimos que:

$f(x)$ tiene un mínimo relativo y absoluto en $\left(-1, \frac{-1}{2}\right)$ y

$f(x)$ tiene un máximo relativo y absoluto en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

4.1.3 Representar $f(x)$.

De $f(x)$ conocemos: $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$, asíntota horizontal $y = 0$, mínimo relativo $\left(-1, \frac{-1}{2}\right)$ y máximo relativo $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

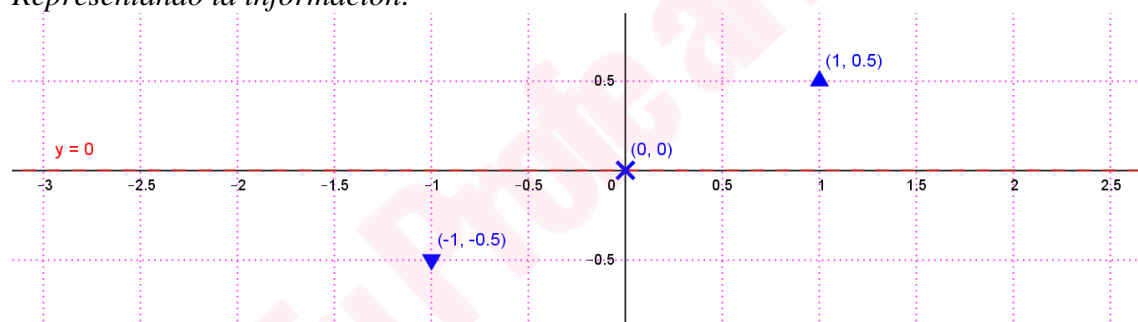
Para representar la función debemos calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

$$x = 0, \quad f(0) = \frac{0}{0^2 + 1} = 0 \rightarrow (0, 0)$$

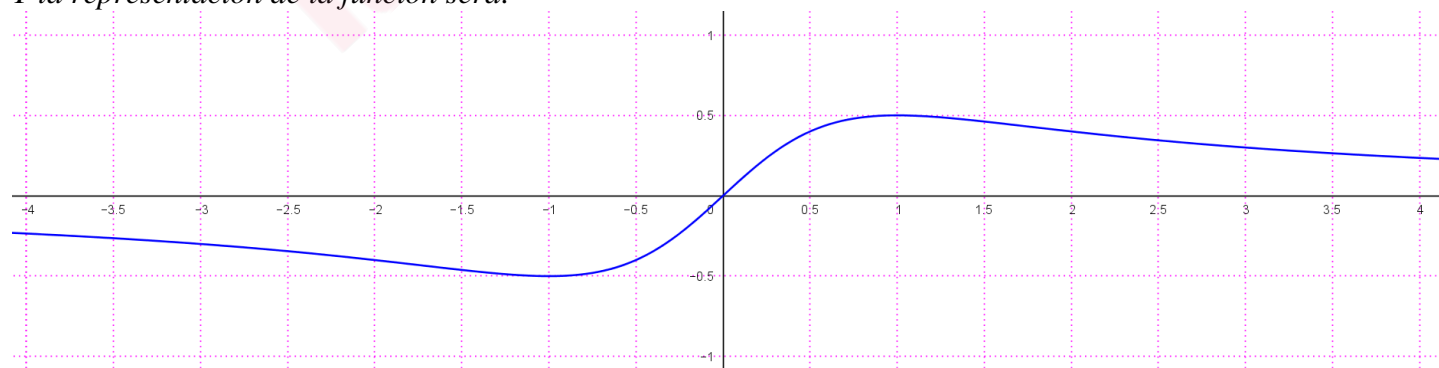
punto de corte $(0, 0)$

$$f(x) = 0, \quad \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

Representando la información:



Y la representación de la función será:



Por lo tanto, los extremos relativos son también los absolutos.

4.2 Dadas las funciones reales de variable real

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{y} \quad g(x) = 8x$$

Se pide:

- 4.2.1 **(0.5 puntos)** Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .
- 4.2.2 **(0.25 puntos)** Dibujar las gráficas de ambas funciones.
- 4.2.3 **(1.75 puntos)** Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la rectas $x = 1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

Solución:

4.2.1 $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Dom $f(x)$,

$$x^2 = 0; \quad x = 0 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Asíntotas.

Verticales. La posible asíntota vertical es $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

Horizontal,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow y = 0 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

Oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} \quad \begin{aligned} &\text{para } x < 0, \quad f'(x) > 0 \rightarrow \text{creciente en } (-\infty, 0) \\ &\text{para } x > 0, \quad f'(x) < 0 \rightarrow \text{decreciente en } (0, +\infty) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, $x = 0$ es asíntota vertical, $y = 0$ es asíntota horizontal, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$ y es decreciente en $(0, +\infty)$.

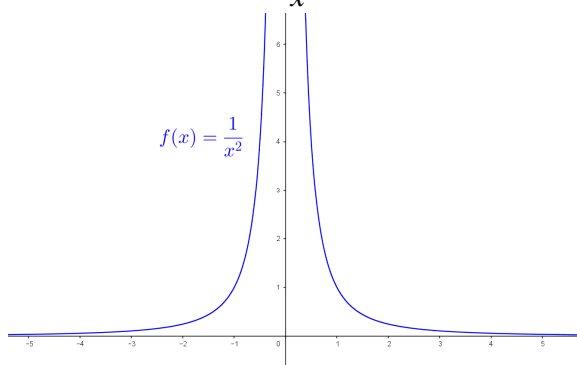
4.2.2 Dibujar la gráfica de ambas funciones.

$f(x)$,

De $f(x)$ conocemos: $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, $x = 0$ es asíntota vertical, $y = 0$ es asíntota horizontal, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$ y es decreciente en $(0, +\infty)$.

¿Punto de corte con el eje OY? $f(x) = 0$; $\frac{1}{x^2} = 0$; $1 = 0$, $f(x)$ no corta a los ejes coordenados.

La representación es:



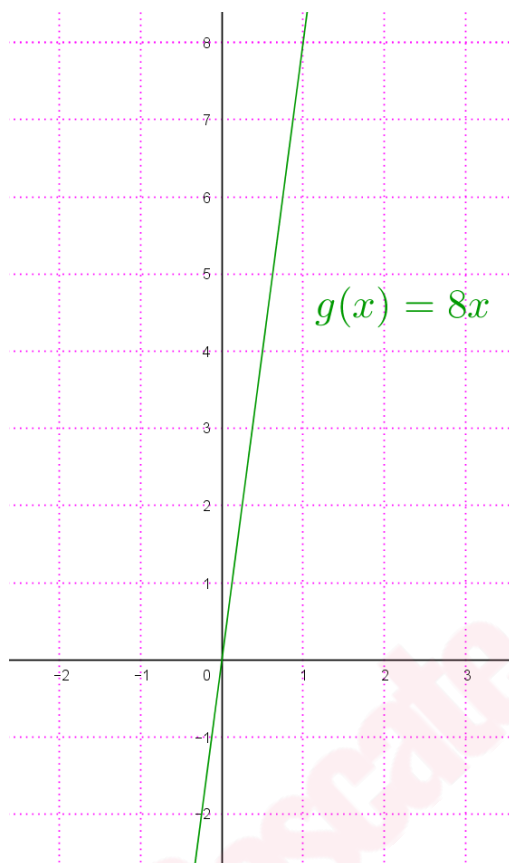
$$g(x) = 8x,$$

$g(x)$ es un polinomio de primer grado,
gráficamente es una línea recta

$$x = 0, \quad g(0) = 8 \cdot 0 = 0$$

$$x = 1, \quad g(1) = 8 \cdot 1 = 8$$

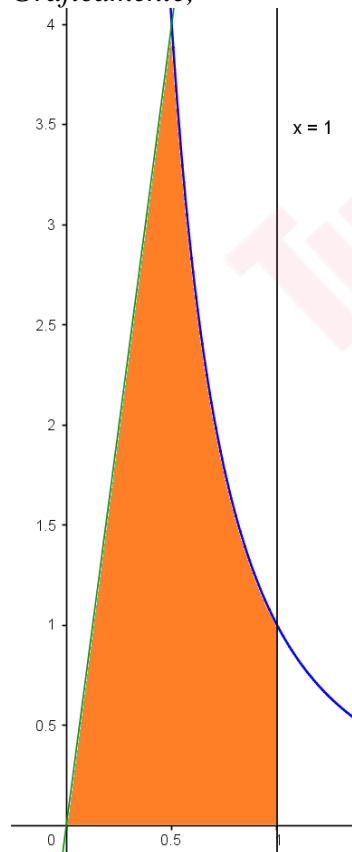
La representación es:



4.2.3 Área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la rectas $x = 1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

Corte entre $f(x)$ y $g(x)$, $\frac{1}{x^2} = 8x$; $1 = 8x^3$; $x^3 = \frac{1}{8}$; $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

Gráficamente,



El área pedida la obtenemos mediante las siguientes integrales definidas:

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} 8x \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} \, dx = \left[\frac{8x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{-1}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left[4x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{-1}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= \left[4 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 4 \cdot 0^2 \right] + \left(\frac{-1}{1} - \frac{-1}{1/2} \right) = 1 + (-1 + 2) = 2$$

El área del recinto indicado es 2 u.a.