

Modelo 6 de 2006

Optimización, áreas, matrices y geometría del espacio.

Opción A - Ejercicio 1

La condición de inflexión en $x = 0$ es $f''(0) = 0$. Como $f''(x) = 6x + 2a$, se obtiene $a = 0$. La gráfica pasa por $(2, 2)$:

$$8 + 2b + 1 = 2 \Rightarrow b = -\frac{7}{2}.$$

Así, $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x + 1$. En el punto de inflexión $(0, 1)$, la pendiente es $f'(0) = b = -7/2$. La tangente y la normal son

$$y = -\frac{7}{2}x + 1,$$

$$y = \frac{2}{7}x + 1.$$

Opción A - Ejercicio 2

En $x = 1$, ambos tramos valen 0, así que la función es continua. Las derivadas laterales son

$$f'_-(1) = \frac{1}{1} = 1, \quad f'_+(1) = -\frac{1}{2-1} = -1.$$

No coinciden, por lo que f no es derivable en $x = 1$. En $[1, 3/2]$ usamos el tramo $\ln(2-x)$. Una primitiva es $-(2-x)\ln(2-x) + (2-x)$, así que

$$\int_1^{3/2} f(x)dx = [-(2-x)\ln(2-x) + (2-x)]_1^{3/2} = \frac{\ln 2 - 1}{2}.$$

Opción A - Ejercicio 3

(a) Primero calculamos

$$AB = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad AB + C = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es $-56 + 50 = -6 \neq 0$, de modo que existe la inversa:

$$(AB + C)^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}.$$

(b) Los vectores no nulos (x, y) que cumplen $C(x, y)^t = 3(x, y)^t$ son los autovectores de autovalor 3. La ecuación es

$$(C - 3I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

La primera fila exige $y = -2x$, y la segunda es proporcional. Por tanto,

$$(x, y) = t(1, -2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta se parametriza como $(x, y, z) = (1, -2, 3) + t(1, 3, -1)$. Al cortar el plano $x - y + z + 1 = 0$ se obtiene $t = 7/3$, de modo que

$$A = \left(\frac{10}{3}, 5, \frac{2}{3}\right).$$

El punto $B = (2, 1, 2)$ corresponde a $t = 1$. Para proyectarlo sobre el plano, usamos su normal $n = (1, -1, 1)$:

$$C = B - \frac{n \cdot B + 1}{|n|^2} n = (2, 1, 2) - \frac{4}{3}(1, -1, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados:

$$(B - A) \times (C - A) = \left(\frac{32}{9}, -\frac{32}{9}, -\frac{64}{9}\right), \quad S = \frac{16\sqrt{6}}{9}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Sea $r > 0$ el radio y $h > 0$ la altura. La superficie total fija da $2\pi r^2 + 2\pi rh = 200$, de donde $h = 100/(\pi r) - r$. El volumen que queremos maximizar es

$$V(r) = \pi r^2 h = 100r - \pi r^3, \quad 0 < r < \frac{10}{\sqrt{\pi}}.$$

Derivamos: $V'(r) = 100 - 3\pi r^2 = 0$, así que $r = 10/\sqrt{3\pi}$. Como $V''(r) = -6\pi r < 0$, es un máximo. Al sustituir en la condición de superficie, $h = 2r$. Por tanto,

$$r = \frac{10}{\sqrt{3\pi}} \text{ cm}, \quad h = \frac{20}{\sqrt{3\pi}} \text{ cm}.$$

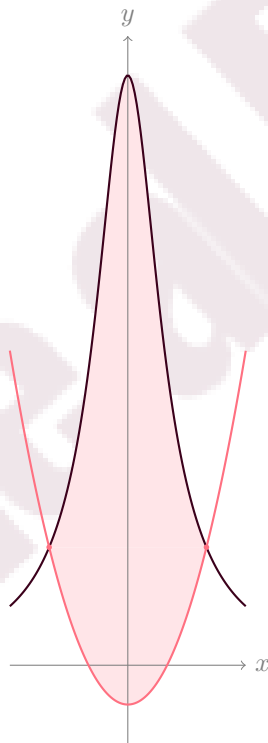
Opción B - Ejercicio 2

Los cortes cumplen

$$\frac{15}{1+x^2} = x^2 - 1 \iff (x^2)^2 = 16,$$

y, como $x^2 \geq 0$, son $x = -2, 2$. Entre esos valores, la curva racional queda encima de la parábola. El área es

$$S = \int_{-2}^2 \left(\frac{15}{1+x^2} - (x^2 - 1) \right) dx = 30 \arctan 2 - \frac{4}{3}.$$



Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & \lambda & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 2 & \lambda & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det A = -2(\lambda - 1).$$

Si $\lambda \neq 1$, el sistema es SCD. Para $\lambda = 1$, el menor de las dos primeras filas y columnas 1,2 vale $-2 \neq 0$ y el determinante se anula, así que $\text{rg } A = 2$. Las ecuaciones segunda y tercera pasan a ser $3x + y + z = 0$ y $2x + y = -2$; junto con la primera determinan soluciones compatibles y no independientes adicionales. En efecto, tomando $z = t$ se obtiene

$$(x, y, z) = (2 - t, 2t - 6, t).$$

La matriz ampliada tiene el mismo rango 2, menor que el número de incógnitas, de modo que el sistema es SCI. **Opción B - Ejercicio 4**

La recta pedida pasa por $A = (1, 2, -1)$ y corta a r , cuyos puntos son (t, t, t) . Para que sea paralela al plano $3x + 2y - z = 4$, su vector director debe ser perpendicular al normal $n = (3, 2, -1)$:

$$((t, t, t) - A) \cdot n = (t - 1, t - 2, t + 1) \cdot (3, 2, -1) = 4t - 8 = 0.$$

De aquí $t = 2$ y el punto de corte es $(2, 2, 2)$. El vector director desde A es $(1, 0, 3)$, perpendicular a n . La recta, en forma paramétrica, es

$$(x, y, z) = (1, 2, -1) + s(1, 0, 3), \quad s \in \mathbb{R}.$$