Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2017--2018 · Enunciado v6

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Opción A

Ejercicio 1 · Región factible y programación lineal

Sean x e y las coordenadas de un punto de la región. El recinto debe satisfacer simultáneamente las cinco restricciones:

$$x + 2y \leq 11, \qquad x \geq 2y - 5, \qquad 3x + y \leq 18, \qquad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Para hallar los vértices intersectamos las rectas frontera y conservamos los puntos que cumplen todas las desigualdades. Sobre los ejes obtenemos $(0,0)$, $(6,0)$ y $(0,5/2)$; las otras intersecciones que delimitan el recinto son

$$x + 2y = 11, \quad x = 2y - 5 \Longrightarrow (x,y) = (3,4),$$
$$x + 2y = 11, \quad 3x + y = 18 \Longrightarrow (x,y) = (5,3).$$

Ambos puntos verifican las restricciones restantes. Así, en sentido antihorario, los vértices son

$$(0,0), \quad (6,0), \quad (5,3), \quad (3,4), \quad (0,5/2).$$

b) Una función lineal alcanza sus extremos en alguno de los vértices de un recinto poligonal. Evaluamos $F(x,y) = 2x + 3y$:

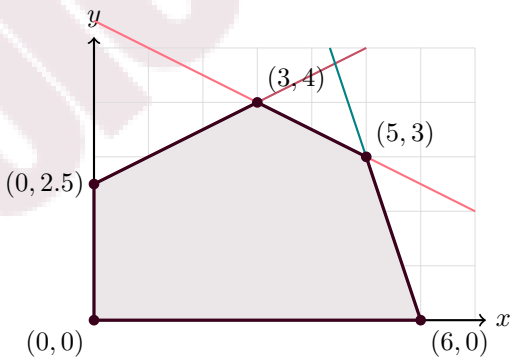
(x,y)	$(0,0)$	$(6,0)$	$(5,3)$	$(3,4)$	$(0,5/2)$
$F(x,y)$	0	12	19	18	$15/2$

Por tanto, el máximo es 19 en $(5,3)$ y el mínimo es 0 en $(0,0)$.
c) Para comprobar si $(5{,}5,\,2)$ es factible sustituimos sus coordenadas en las restricciones. Las dos primeras se cumplen, pero

$$3(5{,}5) + 2 = 18{,}5 > 18.$$

El punto queda fuera del semiplano $3x + y \leq 18$ y no pertenece a la región factible.

$$\boxed{F_{\text{max}} = 19 \text{ en } (5,3), \qquad F_{\text{min}} = 0 \text{ en } (0,0).}$$



Ejercicio 2 · Estudio y representación de una función

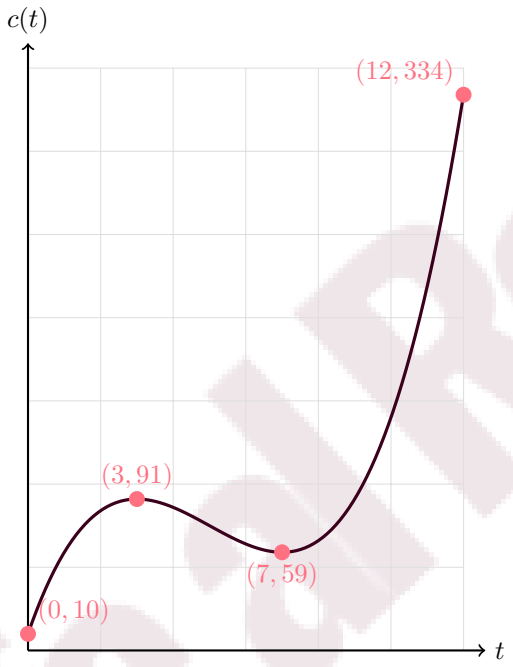
La función de consumo es polinómica, por lo que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$; en el contexto solo interesa $0 \le t \le 12$. Como se pide el máximo y los intervalos de decrecimiento, estudiamos el signo de la derivada:

$$c'(t) = 3t^2 - 30t + 63 = 3(t-3)(t-7).$$

Los puntos críticos interiores son $t = 3$ y $t = 7$. La derivada es positiva en $[0, 3)$, negativa en $(3, 7)$ y positiva en $(7, 12]$. Por ello, el consumo aumenta, después disminuye y finalmente vuelve a aumentar. Comprobamos los extremos del intervalo y los puntos críticos:

$$c(0) = 10, \qquad c(3) = 91, \qquad c(7) = 59, \qquad c(12) = 334.$$

El mayor valor del intervalo es 334 miles de toneladas y se alcanza al cabo de 12 unidades de tiempo. La función decrece entre $t = 3$ y $t = 7$. La gráfica muestra también el máximo y el mínimo locales en esos dos puntos.



$c_{\text{máx}} = 334$ miles de toneladas, en $t = 12$; $\quad c$ decrece en $(3, 7)$.

Academia de Matemáticas, Física y Química · Clases individuales y grupales · Preparación Selectividad, PCE y +25 · tuprofealrescate.com

Ejercicio 3 · Independencia y probabilidad condicionada

Llamamos D al suceso «acudir al dentista» y A al suceso «hacerse una analítica». Los datos son $P(D) = 0{,}25$, $P(A) = 0{,}10$ y $P(D \cap A) = 0{,}08$.

a) Dos sucesos son independientes si $P(D \cap A) = P(D)P(A)$. En este caso,

$$P(D)P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}10 = 0{,}025 \neq 0{,}08 = P(D \cap A),$$

por lo que no son independientes.

b) Primero calculamos la probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos y tomamos el complementario:

$$P(D \cup A) = P(D) + P(A) - P(D \cap A) = 0{,}25 + 0{,}10 - 0{,}08 = 0{,}27,$$

$$P(D^c \cap A^c) = 1 - P(D \cup A) = 0{,}73.$$

El porcentaje pedido es 73%.

c) Entre quienes no van al dentista, la proporción que se hace una analítica es la probabilidad condicionada

$$P(A \mid D^c) = \frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(A) - P(A \cap D)}{1 - P(D)} = \frac{0{,}10 - 0{,}08}{0{,}75} = \frac{2}{75}.$$

En porcentaje, es aproximadamente $2{,}67\%$.

> No son independientes; $\quad P(D^c \cap A^c) = 0{,}73$; $\quad P(A \mid D^c) = \dfrac{2}{75}$.

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza y afijación proporcional

a) La proporción muestral es $\widehat{p} = 74/121$ y $\widehat{q} = 1 - \widehat{p} = 47/121$. Para un intervalo de confianza bilateral de una proporción usamos

$$\widehat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}\widehat{q}}{n}},$$

donde n es el tamaño muestral y $z_{1-\alpha/2}$ es el cuantil de la normal estándar. Con confianza del 97%, $\alpha = 0{,}03$ y $z_{0{,}985} \approx 2{,}170$:

$$\frac{74}{121} \pm 2{,}170\sqrt{\frac{(74/121)(47/121)}{121}} \approx 0{,}6116 \pm 0{,}0962.$$

Así, el intervalo es $(0{,}5154,\ 0{,}7077)$, es decir, entre aproximadamente $51{,}54\%$ y $70{,}77\%$.

b) Al disminuir el nivel de confianza disminuye el cuantil crítico $z_{1-\alpha/2}$. Como el error de estimación es $E = z_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{p}\widehat{q}/n}$ y la muestra no cambia, también disminuye el error.

c) La afijación proporcional conserva la razón de tamaños $1 : 2 : 3$. Si el primer centro aporta k estudiantes, los otros aportan $2k$ y $3k$, de modo que $6k = 121$ y las cuotas teóricas son

$$n_1 = \frac{121}{6} \approx 20{,}17, \qquad n_2 = \frac{242}{6} \approx 40{,}33, \qquad n_3 = \frac{363}{6} = 60{,}5.$$

Al convertir a números enteros y mantener el total de 121, asignamos los 120 primeros como $(20, 40, 60)$ y el estudiante restante al tercer centro, cuya cuota tiene la mayor parte decimal. La muestra queda distribuida como $(20, 40, 61)$.

> $IC_{97\%} \approx (0{,}5154, 0{,}7077)$; $\quad (n_1, n_2, n_3) = (20, 40, 61)$.

Opción B

Ejercicio 1 · Potencias y ecuación matricial

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculamos las primeras potencias para detectar si se repiten:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Por tanto, las potencias de exponente par son I_2 y las de exponente impar son A. Como 2018 es par y 2019 impar,

$$A^{2018} + A^{2019} = I_2 + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) De $XA + BB^t = 2A$ aislamos XA. Como $A^2 = I_2$, se tiene $A^{-1} = A$, y podemos multiplicar por A^{-1} por la derecha:

$$BB^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad 2A - BB^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix},$$

$$X = (2A - BB^t)A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^{2018} + A^{2019} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}.}$$

Ejercicio 2 · Continuidad, derivabilidad y extremos

La función está definida por dos expresiones en el intervalo $[0, 50]$. El único punto de unión es $t = 40$, así que comprobamos allí los límites y las derivadas laterales. Para la primera rama,

$$B_1(40) = -0{,}04(40)^2 + 2{,}4(40) = 32.$$

Para la segunda,

$$B_2(40) = \frac{40(40) - 320}{40} = 32.$$

Ambas coinciden y, como la función está definida en $t = 40$, es continua en ese punto. Las derivadas son

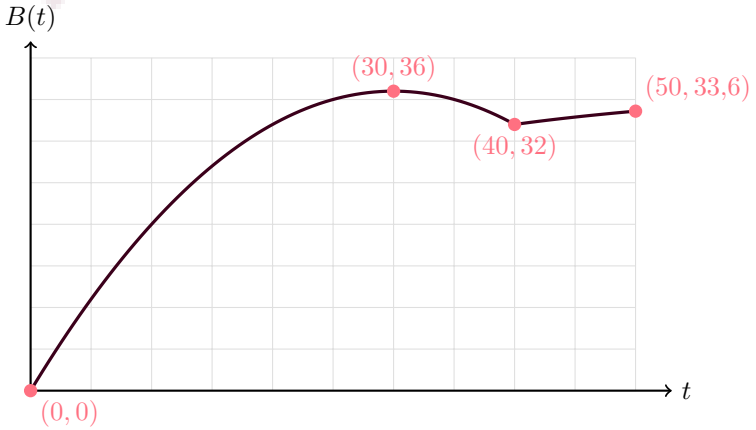
$$B_1'(t) = -0{,}08t + 2{,}4, \qquad B_2'(t) = \frac{320}{t^2},$$

por lo que $B_-'(40) = -0{,}8$ y $B_+'(40) = 0{,}2$. No coinciden, así que B no es derivable en $t = 40$. En el resto del intervalo cada rama es derivable.

Para estudiar la monotonía buscamos los ceros de las derivadas. En la primera rama $B_1'(t) = 0$ cuando $t = 30$; la derivada es positiva antes y negativa después. En la segunda rama $B_2'(t) = 320/t^2 > 0$. Por tanto, B crece en $[0, 30]$, decrece en $[30, 40]$ y vuelve a crecer en $[40, 50]$. Los valores relevantes son

$$B(0) = 0, \quad B(30) = 36, \quad B(40) = 32, \quad B(50) = 33{,}6.$$

El beneficio máximo de todo el periodo es 36 miles de euros y se obtiene a los 30 años. En $t = 40$ hay un mínimo local, aunque la función no sea derivable allí. La gráfica refleja estos cambios de sentido.



$$\boxed{B_{\text{max}} = 36 \text{ miles de euros, en } t = 30; \qquad B \text{ no es derivable en } t = 40.}$$

Ejercicio 3 · Probabilidad total y teorema de Bayes

Sean L_1, L_2, L_3 los sucesos de que el lavado lo realice cada una de las máquinas, y D el suceso «lavado defectuoso». Las probabilidades de uso son $0{,}50$, $0{,}30$ y $0{,}20$, respectivamente. Las probabilidades condicionadas de defecto son $0{,}05$, $0{,}15$ y $0{,}20$.

a) Sumamos las probabilidades de los caminos que terminan en un lavado no defectuoso:

$$P(D^c) = 0{,}50(0{,}95) + 0{,}30(0{,}85) + 0{,}20(0{,}80) = 0{,}89.$$

b) Primero hallamos la probabilidad total de defecto:

$$P(D) = 0{,}50(0{,}05) + 0{,}30(0{,}15) + 0{,}20(0{,}20) = 0{,}11.$$

La probabilidad pedida se obtiene con Bayes, pues conocemos que el lavado fue defectuoso y buscamos la máquina que lo produjo:

$$P(L_1 \mid D) = \frac{P(L_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}50 \cdot 0{,}05}{0{,}11} = \frac{5}{22}.$$

$$\boxed{P(D^c) = 0{,}89; \qquad P(L_1 \mid D) = \frac{5}{22} \approx 0{,}2273.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para una media

La población es Normal y su varianza conocida es 64, luego la desviación típica es $\sigma = 8$. La media muestral de las 16 edades es $\bar{x} = 624/16 = 39$. Para una media con desviación típica poblacional conocida, el intervalo de confianza es

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Con confianza del 97%, $z_{0{,}985} \approx 2{,}170$ y el error es

$$E = 2{,}170\frac{8}{\sqrt{16}} = 4{,}340.$$

Por tanto, el intervalo para la edad media es $(39 - 4{,}340,\ 39 + 4{,}340)$, es decir, aproximadamente $(34{,}66, 43{,}34)$ años.

b) Para que el error sea inferior a 2 años con confianza del 99%, usamos $z_{0{,}995} \approx 2{,}576$ y exigimos

$$2{,}576\frac{8}{\sqrt{n}} < 2 \quad \Longrightarrow \quad n > \left(\frac{2{,}576 \cdot 8}{2}\right)^2 \approx 106{,}16.$$

El tamaño debe ser entero y superar ese valor; por tanto, el mínimo es $n = 107$.

$$\boxed{IC_{97\%} \approx (34{,}66, 43{,}34) \text{ años}; \qquad n_{\text{mín}} = 107.}$$