

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y el vector } c = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ se pide :}$$

- a) Calcula el determinante de la matriz A y calcula A^{-1} . (2 + 4 puntos)
 b) Determina el vector x que verifica $Ax = B^t c$, donde B^t representa la matriz traspuesta de B. (4 puntos)

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 3 - 4 = 1. \text{ Por tanto, } |A| \neq 0$$

Como $|A| \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$

Cálculo de A^{-1} ,

$$A \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) ¿Vector x ? / $Ax = B^t c$

Calculemos $B^t c$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ luego } B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-2) - 1(-1) + 2 \cdot 3 \\ -2(-2) + 2(-1) - 1 \cdot 3 \\ 0(-2) + 2(-1) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 1 + 6 \\ 4 - 2 - 3 \\ 0 - 2 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } Ax = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ multiplicando por la izquierda por } A^{-1},$$

$$A^{-1} A x = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow I x = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow x = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 1(-1) + 6 \cdot 7 \\ 2 \cdot 5 - 1(-1) + 5 \cdot 7 \\ 2 \cdot 5 - 1(-1) + 4 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 + 1 + 42 \\ 10 + 1 + 35 \\ 10 + 1 + 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 46 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = \begin{pmatrix} 58 \\ 46 \\ 39 \end{pmatrix}$

Tu Profe al Rescate

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Los ingresos y costes anuales, en miles de euros, de una fábrica de mochilas vienen dados, respectivamente, por las funciones

$$I(x) = 4x - 9, \quad C(x) = 0,01x^2 + 3x$$

donde la variable x expresa en euros el precio de venta de una mochila. Se pide:

- Calcula la función de beneficios. (1 punto)
- ¿Cuál ha de ser el precio de venta x para que el beneficio sea máximo? (1 punto)
¿Cuál es dicho beneficio máximo? (1 punto)
- Para la función de beneficios, determina los puntos de corte con los ejes y las zonas de crecimiento y decrecimiento. Representa gráficamente dicha función. (5 puntos)
- Razona para qué precios de venta (valores de x) la empresa tendría pérdidas. (2 puntos)

Solución:

Tenemos las funciones: $I(x) = 4x - 9$, $C(x) = 0,01x^2 + 3x$, en las que x es el precio de venta de la mochila (en euros), por lo que, $x \geq 0$. $I(x)$ y $C(x)$ representan miles de euros.

a) Función de beneficios, $B(x)$, en miles de euros.

$$B(x) = I(x) - C(x) = 4x - 9 - (0,01x^2 + 3x) = 4x - 9 - 0,01x^2 - 3x = -0,01x^2 + x - 9, x \geq 0.$$

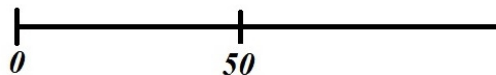
Solución: la función de beneficios es $B(x) = -0,01x^2 + x - 9, x \geq 0$.

b) Máximo de $B(x)$

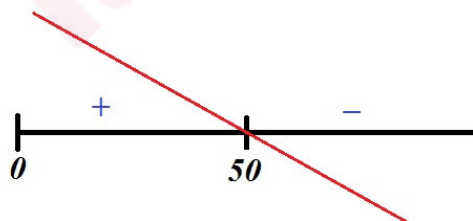
$$B'(x) = -0,02x + 1$$

$$B'(x) = 0 \rightarrow -0,02x + 1 = 0 \rightarrow -0,02x = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{-0,02} = 50$$

Hay que estudiar el signo de $B'(x)$ en los intervalos:



$B'(x)$ es una línea recta de pendiente negativa que pasa por $(50,0)$, por lo que:



Por tanto, en $x = 50$ hay un máximo relativo de $B(x)$ que, además es el absoluto ya que a su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.

$$\text{Para } x = 50, B(50) = -0,01 \cdot 50^2 + 50 - 9 = 16.$$

Solución: para que el beneficio sea máximo el precio de venta de las mochilas ha de ser de 50 euros y el beneficio máximo será de 16 miles de euros, es decir, 16000 euros.

c) $B(x) = -0,01x^2 + x - 9$, $x \geq 0$. ¿Puntos de corte con ejes, monotonía y representación?

Puntos de corte con los ejes coordenados:

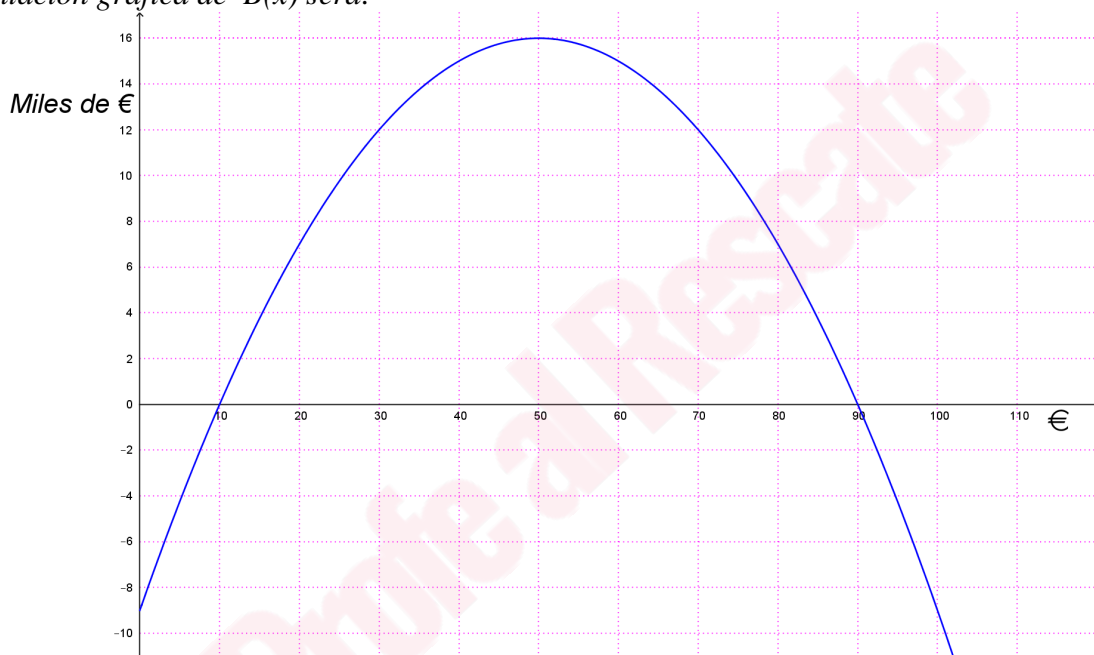
$$x = 0 \rightarrow B(0) = -9 \rightarrow (0, -9)$$

$$B(x) = 0 \rightarrow -0,01x^2 + x - 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-0,01)(-9)}}{2(-0,01)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 0,36}}{-0,02} =$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{0,64}}{-0,02} = \frac{-1 \pm 0,8}{-0,02} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1 + 0,8}{-0,02} = 10 \rightarrow (10, 0) \\ x_2 = \frac{-1 - 0,8}{-0,02} = 90 \rightarrow (90, 0) \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: $(0, -9)$, $(10, 0)$ y $(90, 0)$.

Según vimos en el apartado (b) $B(x)$ es creciente en el intervalo $(0, 50)$ y decreciente en $(50, +\infty)$ y su máximo es $(50, 16)$.

La representación gráfica de $B(x)$ será:



d) La empresa tiene pérdidas cuando los valores de la función de beneficios son negativos.

Según lo visto en el apartado anterior, la empresa tendría pérdidas en los intervalos $[0, 10)$ y $(90, +\infty)$.

Es decir, para precios de venta de las mochilas entre 0 € y 10€ y a partir de 90€ la empresa tendría pérdidas (10€ y 90€ excluidos, para ellos el beneficio es nulo).

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Un dado normal tiene sus caras numeradas del número 1 al 6. Otro dado está trucado y tiene cuatro caras numeradas con el 5 y las otras dos caras numeradas con el 6. Se elige un dado al azar y se realizan dos tiradas con el dado elegido. Se pide:

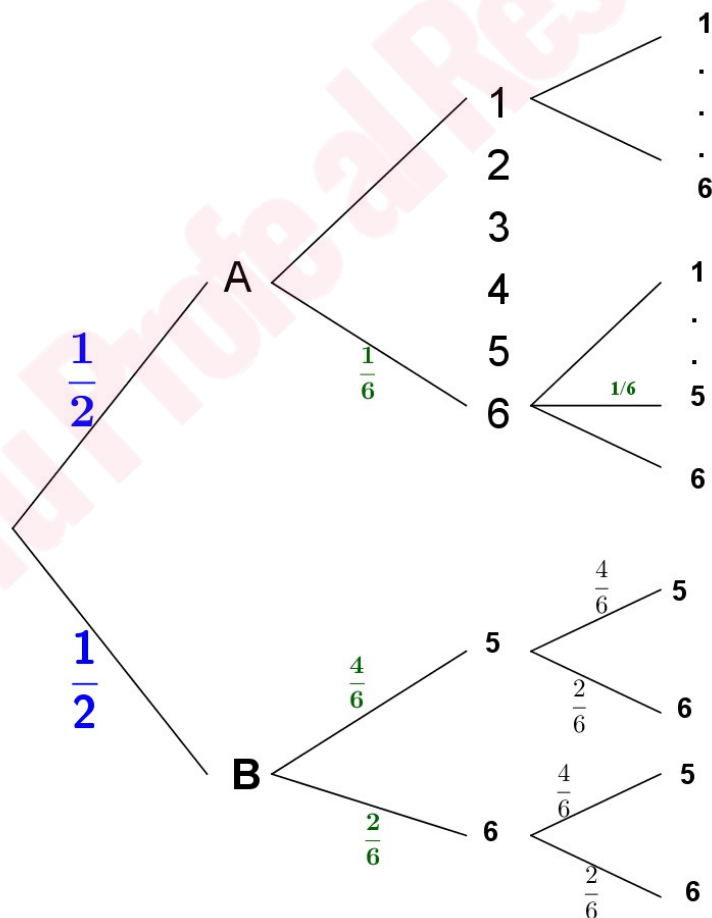
- Calcula la probabilidad de sacar un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda. (3 puntos)
- Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos entre las dos tiradas sea 11. (3 puntos)
- Si al realizar las dos tiradas con el dado elegido al azar se obtiene un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado? (4 puntos)

Solución:

Dado normal, A, sus caras = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

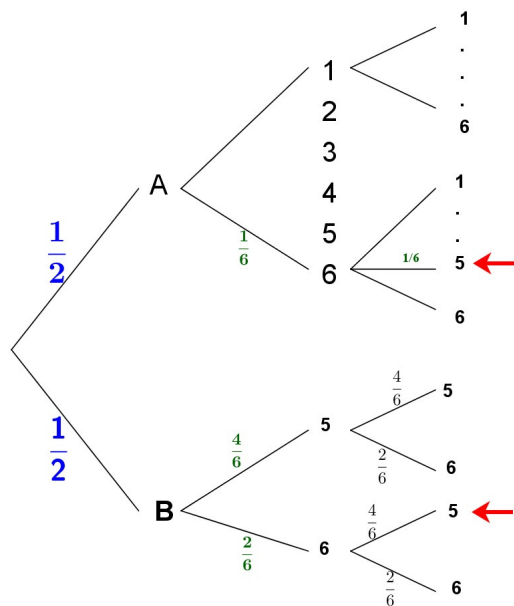
Dado trucado, B, sus caras = { 5, 5, 5, 5, 6, 6 }

Se elige un dado al azar y se realizan dos tiradas con el dado elegido, el árbol del problema es: (el árbol no está completo para que no sea enorme, sólo dibujamos las ramas más necesarias)



a) $P(1^{\text{a}} \text{ tirada } 6 \text{ y } 2^{\text{a}} \text{ tirada } 5)$

$1^{\text{a}} \text{ tirada } 6 \text{ y } 2^{\text{a}} \text{ tirada } 5$ se puede obtener con el dado A o con el dado B, los resultados correspondientes los marcamos en el árbol:



Por tanto,

$$P(1^{\text{a}} \text{ tirada } 6 \text{ y } 2^{\text{a}} \text{ tirada } 5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{72} + \frac{9}{72} = \frac{1}{8}$$

Solución: $1/8$

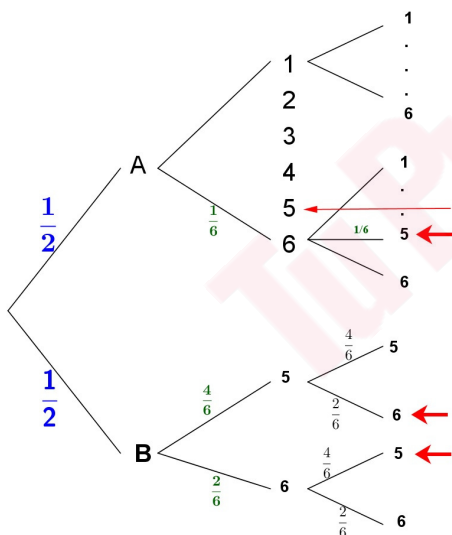
b) $P(\text{suma de las dos tiradas sea } 11)$

La suma de las dos tiradas sea 11 se obtiene cuando

Dado A $5+6$
Dado B $6+5$

, los resultados correspondientes

los marcamos en el árbol:



Por tanto,

$P(\text{suma de las dos tiradas sea } 11) =$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{36} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{16}{36} \right) = \frac{1}{36} + \frac{8}{36} = \frac{1}{4}$$

Solución: $1/4$

c) Definimos los sucesos: $B = \text{dado es trucado}$ y $R = \text{obtener } 6 \text{ en la } 1^{\text{a}} \text{ tirada y } 5 \text{ en la } 2^{\text{a}}.$

La probabilidad a calcular es: $P(B/R)$. Calculemosla:

(Según obtuvimos en el apartado (a) $P(R) = 1/8$)

$$P(B/R) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}$$

Solución: $8/9$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Un inversor decidió invertir un total de 42000 € entre tres productos:

- Una cuenta de ahorros por la que recibe unos intereses anuales del 5%.
- Un depósito a plazo fijo por el que le pagan unos intereses anuales del 7%.
- Unos bonos con unos intereses anuales del 9%.

Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 2600 €.

Si los intereses que ha recibido de la cuenta de ahorros son 200 € menos que la suma de los intereses que ha percibido por las otras dos inversiones, ¿qué cantidad invirtió en cada producto?

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Solución:

Llamando x = cantidad invertida en cuenta de ahorro (5%)

y = cantidad invertida en depósito (7%)

z = cantidad invertida en bonos (9%)

De los datos del problema,

Invirtió un total de 42000 € entre tres productos:	$x + y + z = 42.000$
Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 2600 €:	$0'05x + 0'07y + 0'09z = 2600$
Los intereses que ha recibido de la cuenta de ahorros son 200 € menos que la suma de los intereses que ha percibido por las otras dos inversiones:	$0'05x = 0'07y + 0'09z - 200$

Arreglamos las dos últimas ecuaciones,

$$0'05x + 0'07y + 0'09z = 2600 \rightarrow 5x + 7y + 9z = 260.000$$

$$0'05x = 0'07y + 0'09z - 200 \rightarrow 5x = 7y + 9z - 20.000 \rightarrow 5x - 7y - 9z = -20.000$$

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} x + y + z = 42000 \\ 5x + 7y + 9z = 260000 \\ 5x - 7y - 9z = -20000 \end{cases}$$
 Lo resolvemos por Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42000 \\ 5 & 7 & 9 & 260000 \\ 5 & -7 & -9 & -20000 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - 5F_1]{F_2 - 5F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42000 \\ 0 & 2 & 4 & 50000 \\ 0 & -12 & -14 & -230000 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + 6F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42000 \\ 0 & 2 & 4 & 50000 \\ 0 & 0 & 10 & 70000 \end{array} \right)$$

$$\text{De } F_3 \rightarrow 10z = 70000 \rightarrow z = \frac{70000}{10} = 7000$$

$$\text{De } F_2 \rightarrow 2y + 4z = 50000 \rightarrow 2y + 4 \cdot 7000 = 50000 \rightarrow 2y + 28000 = 50000 \rightarrow$$

$$2y = 50000 - 28000 \rightarrow 2y = 22000 \rightarrow y = \frac{22000}{2} = 11000$$

$$\text{De } F_1 \rightarrow x + y + z = 42000 \rightarrow x + 11000 + 7000 = 42000 \rightarrow x + 18000 = 42000 \rightarrow$$

$$x = 42000 - 18000 \rightarrow x = 24000$$

Solución: en la cuenta de ahorro invirtió 24000 euros, en el depósito 11000 euros y en los bonos 7000 euros.

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Una explotación minera extrae $f(t) = 30 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{800}t^3$ Toneladas de carbón por año, donde la variable t indica el tiempo transcurrido, en años, desde el inicio de la explotación. Se pide:

- Calcula en qué año se alcanza el máximo de extracción y cuál es dicho valor. (5 puntos)
- Si se necesita extraer como mínimo 10 Toneladas por año para que la explotación sea rentable, estudia si en el año $t = 40$ es rentable. (2 puntos)
- ¿Existe algún periodo de tiempo, a partir de los 40 años, en el que la explotación es rentable? Razona tu respuesta. (3 puntos)

Solución:

$$f(t) = 30 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{800}t^3 \quad \begin{cases} t \equiv \text{años desde inicio explotación} \\ f(t) \equiv \text{Toneladas/año} \end{cases} \quad \text{como } t \text{ son años, } t \geq 0$$

a) *Máximo.*

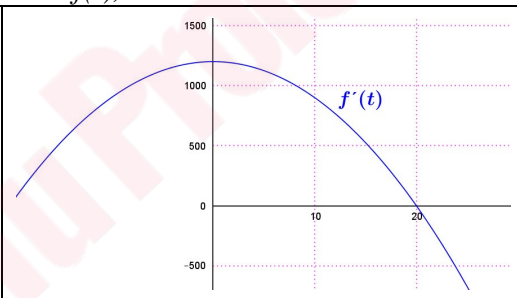
$$f'(t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{800}3t^2 = \frac{1200 - 3t^2}{800}$$

$$\frac{1200 - 3t^2}{800} = 0 \rightarrow 1200 - 3t^2 = 0 \rightarrow 1200 = 3t^2 \rightarrow t^2 = \frac{1200}{3} \rightarrow t^2 = 400 \rightarrow$$

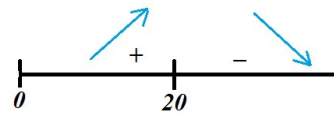
$$t = \pm\sqrt{400} = \pm 20, \text{ como } t \geq 0, \quad t = 20$$

Estudiamos la monotonía de $f(t)$,

$f'(t)$ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de t^2 negativo y raíces -20 y 20 . Gráficamente $f'(t)$ será:



Luego, el signo de $f'(t)$:



Por tanto, $f(t)$ es creciente en el intervalo $(0, 20)$ y decreciente en $(20, +\infty)$. Luego el máximo relativo de $f(t)$ se alcanza para $t = 20$ y, además, es el absoluto ya que $f(t)$ a su izquierda es creciente y a su derecha decreciente.

$$\text{Para } t = 20, \quad f(20) = 30 + \frac{3}{2} \cdot 20 - \frac{1}{800}20^3 = 50$$

Finalmente, el máximo de extracción se alcanza a los 20 años de inicio de la explotación y este máximo es de 50 toneladas.

b) Para que la explotación sea rentable, según el enunciado, $f(t) \geq 10$

$$\text{Para } t = 40, \quad f(40) = 30 + \frac{3}{2} \cdot 40 - \frac{1}{800}40^3 = 10 \quad (\geq 10)$$

Luego, al cabo de 40 años de inicio de la explotación ($t = 40$) la explotación es rentable ($f(40) = 10$).

c) Considerando lo estudiado en el apartado (a), como $f(t)$ es decreciente en $(20, +\infty)$ entonces para valores de $t > 40$ $f(t) < 10$ (en apartado (b) obtuvimos que $f(40) = 10$).

Por tanto, **a partir de 40 años no hay periodo de tiempo en que la explotación sea rentable.**

Otra forma de resolverlo:

Representar la función $f(t)$.

De esta función sabemos:

$$t = 0 \rightarrow f(0) = 30 \rightarrow (0, 30)$$

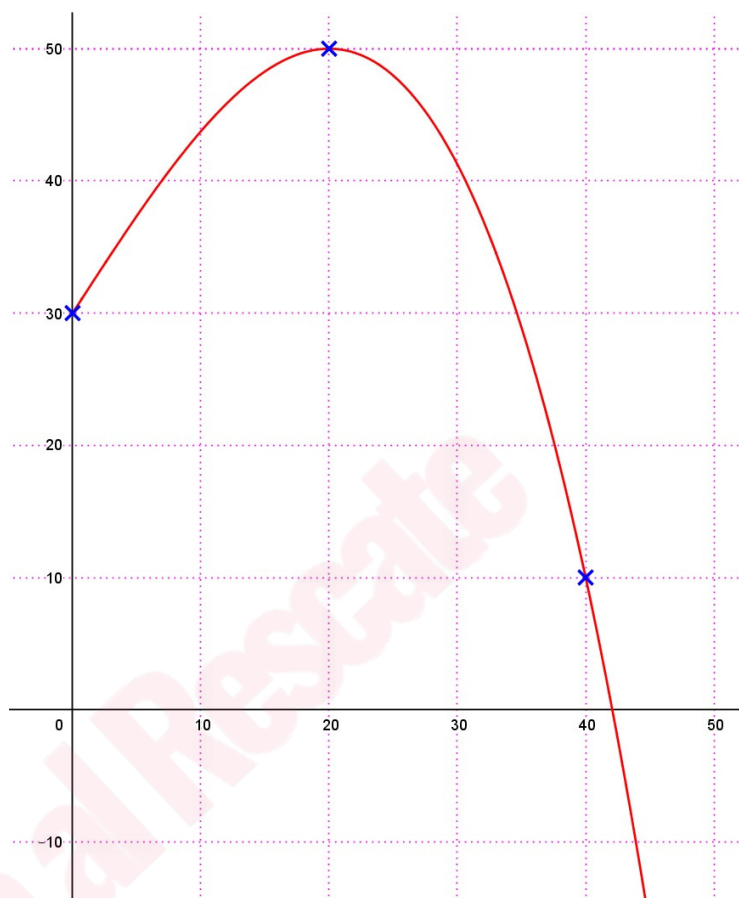
$$t = 40 \rightarrow f(40) = 10 \rightarrow (40, 10)$$

es creciente en $(0, 20)$ y

decreciente en $(20, +\infty)$

máximo $(20, 50)$

Su representación es:



A partir de $t = 40$ $f(t) < 10$, por lo que **a partir de 40 años no hay periodo de tiempo en que la explotación sea rentable.**

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. El espacio muestral asociado a un experimento aleatorio es $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$. Se sabe que $P(a) = P(c) = \frac{1}{8}$, $P(d) = \frac{1}{4}$, $P(e) = \frac{1}{3}$. Dados los sucesos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, d, e\}$ y siendo $\bar{A}$ el suceso contrario o complementario de A y $\bar{B}$ el suceso contrario o complementario de B , calcula:

a) $P(A \cap B)$. (2 puntos)

b) $P(A \cup \bar{B})$. (2 puntos)

c) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. (2 puntos)

d) $P\left(\frac{A}{B}\right)$. (2 puntos)

e) $P\left(\frac{B}{A}\right)$. (2 puntos)

Solución:

$$\Omega = \{a, b, c, d, e\}, \quad P(a) = P(c) = \frac{1}{8}, \quad P(d) = \frac{1}{4}, \quad P(e) = \frac{1}{3}.$$

Como Ω es el espacio muestral del experimento $\rightarrow P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) = 1$, sustituyendo los valores de las probabilidades conocidas:

$$\frac{1}{8} + P(b) + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 1 \rightarrow P(b) + \frac{5}{6} = 1 \rightarrow P(b) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$A = \{a, b, c\} \rightarrow \bar{A} = \{d, e\} \quad \text{y} \quad B = \{b, d, e\} \rightarrow \bar{B} = \{a, c\}$$

$$a) A \cap B = \{b\} \rightarrow P(A \cap B) = P(b) = \frac{1}{6} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$b) A \cup \bar{B} = \{a, b, c\} \rightarrow P(A \cup \bar{B}) = P(a) + P(b) + P(c) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{5}{12} \qquad P(A \cup \bar{B}) = \frac{5}{12}$$

$$c) \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset \rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\emptyset) = 0 \qquad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0$$

$$d) P\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \left\{ \begin{array}{l} A \cap \bar{B} = \{a, c\} \rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(a) + P(c) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \\ \bar{B} = \{a, c\} \rightarrow P(\bar{B}) = \frac{1}{4} \end{array} \right\} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1$$

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = 1$$

$$e) P(B/A)$$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \left\{ \begin{array}{l} P(B \cap A) = \frac{1}{6} \quad \{\text{obtenido en apartado (a)}\} \\ A = \{a, b, c\} \rightarrow P(A) = P(a) + P(b) + P(c) = \frac{5}{12} \quad \{\text{apartado (a)}\} \end{array} \right\} = \frac{1/6}{5/12} = \frac{2}{5}$$

$$P(B/A) = \frac{2}{5}$$

Tu Profe al Rescate