

Modelo 4 de 2006

Integración, matrices, funciones racionales y geometría analítica.

Opción A - Ejercicio 1

(a) De $f(x) = ax^2 + b$ se tiene $f'(x) = 2ax$. La pendiente en $x = 3$ es $6a = -12$, luego $a = -2$. La integral fija b :

$$\int_0^6 (-2x^2 + b)dx = -144 + 6b = 6 \Rightarrow b = 25.$$

Así, $a = -2, b = 25$.

(b) La condición de extremo en $x = -6$ es $f'(-6) = -12 + p = 0$, de donde $p = 12$. Además,

$$f(-6) = 36 - 72 + q = -2 \Rightarrow q = 34.$$

Por tanto, $p = 12, q = 34$. **Opción A - Ejercicio 2**

Aplicamos integración por partes dos veces al término $x^2 e^{-x}$:

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C.$$

Como $\int e^{-x} dx = -e^{-x}$,

$$\int (x^2 - 1)e^{-x} dx = -(x+1)^2 e^{-x} + C.$$

Opción A - Ejercicio 3

(a) El determinante de A es

$$\det A = (m-2)(m+3).$$

La matriz tiene inversa exactamente cuando su determinante no se anula; por ello $m \neq 2, -3$.

(b) Para $m = 0$, la ecuación $XA = (3, 1, 1)$ tiene como solución $X = (3, 1, 1)A^{-1}$. Calculando la inversa o comprobando el producto,

$$X = (2, 1, 1).$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta r queda en forma paramétrica:

$$r : (x, y, z) = (5, -2, 0) + t(2, -1, 4).$$

La otra recta, intersección de planos con normales $(3, -2, 1)$ y $(-1, 2, -3)$, tiene dirección $(1, 2, 1)$. Un punto se obtiene resolviendo sus ecuaciones: $S = (2, 2, 0)$. Para decidir la posición relativa, comprobamos el producto mixto:

$$(S - R) \cdot (d_r \times d_s) = (-3, 4, 0) \cdot (-9, 2, 5) = 35 \neq 0.$$

Por tanto, las rectas son alabeadas. Un plano que contiene a r y es paralelo a s tiene normal $d_r \times d_s = (-9, 2, 5)$. Al pasar por $R = (5, -2, 0)$,

$$9x - 2y - 5z - 49 = 0.$$

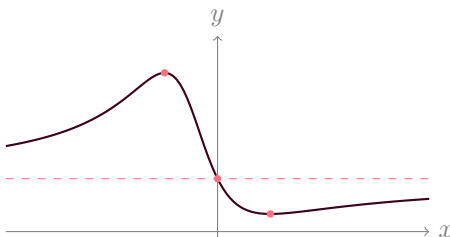
Opción B - Ejercicio 1

El denominador $x^2 + x + 1$ tiene discriminante negativo y es positivo para todo x , así que el dominio es $\mathbb{R}$. Como numerador y denominador tienen el mismo grado, la asíntota horizontal es $y = 1$; no hay verticales ni oblicuas. La derivada es

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}.$$

El signo da crecimiento en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, y decrecimiento en $(-1, 1)$. Los extremos relativos son

$$f(-1) = 3 \quad (\text{máximo}), \quad f(1) = \frac{1}{3} \quad (\text{mínimo}).$$



Opción B - Ejercicio 2

Las tangentes son $y = x$ en $x = 0$ y $y = \pi - x$ en $x = \pi$. Se cortan en $x = \pi/2$, por encima de $\sin x$; el recinto queda entre las tangentes y el arco de seno. Por simetría,

$$S = 2 \int_0^{\pi/2} (x - \sin x) dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} + \cos x \right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi^2}{4} - 2}.$$

Opción B - Ejercicio 3

(a) Los valores pedidos anulan el determinante:

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 5).$$

Por tanto, $\boxed{\lambda = 2, 5}$.

(b) Calculamos

$$A^2 = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}, \quad 7A = \begin{pmatrix} 28 & 14 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}, \quad 10I = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Al combinar los resultados,

$$\boxed{A^2 - 7A + 10I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Opción B - Ejercicio 4

La recta r es la intersección de planos con normales $(1, 1, 1)$ y $(1, -2, 3)$; su dirección es $(5, -2, -3)$. Tomando $z = 0$, se obtiene el punto $P = (2/3, 1/3, 0) \in r$.

(a) Buscamos un plano que contenga r y no corte al eje OZ . Un normal sin componente z debe ser perpendicular a la dirección: podemos tomar $n = (2, 5, 0)$, pues $2 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) = 0$. Por P , el plano queda

$$\boxed{2x + 5y - 3 = 0}.$$

Al sustituir $x = y = 0$ no se obtiene solución en z , así que no corta al eje OZ .

(b) La proyección ortogonal de $A = (1, 2, 1)$ sobre r tiene forma $H = P + t(5, -2, -3)$. La perpendicularidad requiere

$$t = \frac{(A - P) \cdot (5, -2, -3)}{5^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \frac{-14/3}{38} = -\frac{7}{57}.$$

Así, $\boxed{H = (1/19, 11/19, 7/19)}$.