

OPCIÓN B**Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas****Problema 1.** Dos matrices A y B satisfacen las siguientes igualdades:

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula A y B .
 b) Calcula la matriz X sabiendo que $A X A = B$

*Solución:**a) Debemos resolver el sistema matricial:*

$$\begin{cases} A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{Sumando ambas ecuaciones,} \quad 2A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Despejando } B \text{ en la 1ª ecuación: } B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Buscamos una matriz X / $A X A = B$ *Veamos si existe A^{-1} ,*

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculemos A^{-1} ,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente } A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Calculemos la matriz X ,

$A X A = B$, multiplicando por A^{-1} por la izquierda: $A^{-1} A X A = A^{-1} B$, como $A^{-1} A = I$, $I X A = A^{-1} B$,
 $X A = A^{-1} B$

Multiplicando, ahora, por A^{-1} por la derecha: $X A A^{-1} = A^{-1} B A^{-1}$, luego $X = A^{-1} B A^{-1}$

$$\text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/4 & -11/4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/4 & -11/4 \end{pmatrix}$$

OPCIÓN B**Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas****Problema 2.** Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 8x + 15}$, se pide:

- Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
- Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos locales.
- Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

*Solución:**a) Dom $f(x)$*

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{8+2}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{8-2}{2} = 3 \end{cases}$$

Por tanto, $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \sim \{3, 5\}$ *Puntos de corte con los ejes coordenados.**Corte con el eje OX*

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\rightarrow \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 8x + 15} = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow (4, 0) \end{aligned}$$

Corte con el eje OY

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 8 \cdot 0 + 16}{0^2 - 8 \cdot 0 + 15} = \frac{16}{15} \rightarrow \left(0, \frac{16}{15}\right)$$

Por tanto, los puntos de corte con los ejes coordenados son: $(4, 0)$ y $\left(0, \frac{16}{15}\right)$.*b) Asíntotas verticales**Las posibles a.v. las buscamos entre los valores de x que anulan el denominador de $f(x)$, es decir, $x = 3$ ó 5 , según hemos obtenido en el apartado anterior.* $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 8x + 15} = \frac{3^2 - 8 \cdot 3 + 16}{3^2 - 8 \cdot 3 + 15} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow x = 3 \text{ es a.v.}$$

 $x = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 8x + 15} = \frac{5^2 - 8 \cdot 5 + 16}{5^2 - 8 \cdot 5 + 15} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow x = 5 \text{ es a.v.}$$

Asíntotas horizontales,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 8x + 15} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 8x + 15} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow y = 1 \text{ es a.h.}$$

Por tanto, las asíntotas verticales de $f(x)$ son $x = 3$ y $x = 5$, y su asíntota horizontal $y = 1$.

Para resolver los apartados c) y d) calculamos $f'(x)$ y estudiamos su signo,

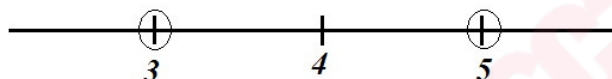
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-8)(x^2-8x+15) - (x^2-8x+16)(2x-8)}{(x^2-8x+15)^2} = \frac{(2x-8)[(x^2-8x+15) - (x^2-8x+16)]}{(x^2-8x+15)^2} = \\ &= \frac{(2x-8)[x^2-8x+15-x^2+8x-16]}{(x^2-8x+15)^2} = \frac{(2x-8)(-1)}{(x^2-8x+15)^2} = \frac{8-2x}{(x^2-8x+15)^2} \end{aligned}$$

Para estudiar el signo de $f'(x)$ obtengamos las raíces del numerador y del denominador.

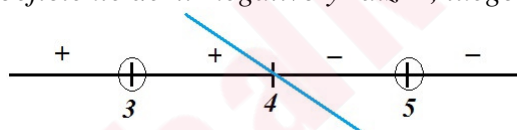
$$8-2x=0; \quad 8=2x; \quad x=4$$

$$(x^2-8x+15)^2=0; \quad x^2-8x+15=0; \quad x=3, 5 \text{ (hecho en a) }.$$

En la recta real marcamos las raíces obtenidas y los valores de x que no son del dominio de la función,



Hay que estudiar el signo de $f'(x)$ en estos cuatro intervalos. $f'(x)$ es un cociente cuyo denominador está elevado al cuadrado, luego siempre es positivo; por tanto el signo de $f'(x)$ solo depende del numerador que es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo y raíz 4, luego:



Resolvamos los apartados c) y d)

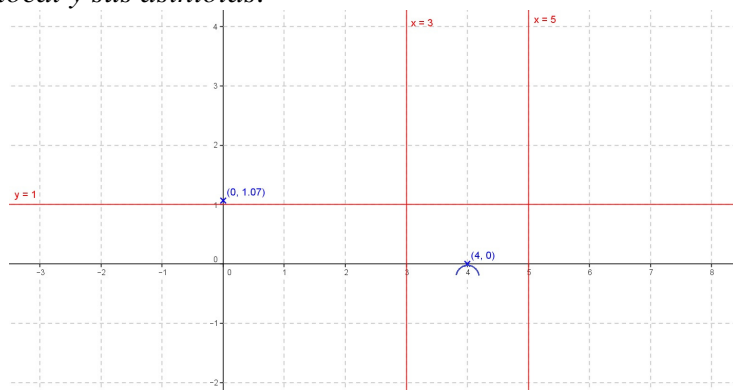
c) $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 3) \cup (3, 4)$ y $f(x)$ es decreciente en $(4, 5) \cup (5, +\infty)$

d) $f(x)$ solo tiene un máximo local para $x = 4$,

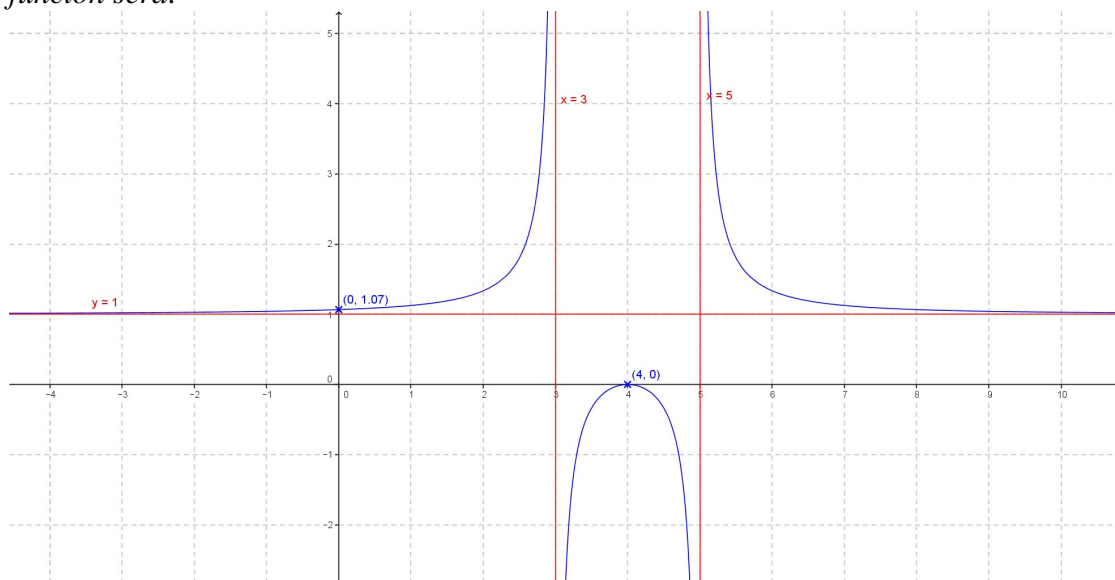
$$x=4 \rightarrow f(4) = \frac{4^2 - 8 \cdot 4 + 16}{4^2 - 8 \cdot 4 + 15} = \frac{16 - 32 + 16}{16 - 32 + 15} = \frac{0}{-1} = 0$$

Por tanto, $f(x)$ tiene un máximo local en $(4, 0)$ y no tiene mínimos locales.

d) De lo estudiado en los apartados anteriores, conocemos los puntos de corte de $f(x)$ con los ejes coordenados, su máximo local y sus asíntotas:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de la función será:



Si con los datos obtenidos no se supiese dibujar la función, se puede completar calculando la posición de la curva respecto de las asíntotas.

$x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 8x + 15} \stackrel{x=2.9}{=} \frac{2.9^2 - 8 \cdot 2.9 + 16}{2.9^2 - 8 \cdot 2.9 + 15} \infty = \frac{+}{+} \infty = +\infty$$

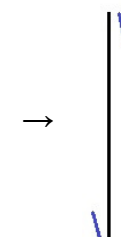
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 8x + 15} \stackrel{x=3.1}{=} \frac{3.1^2 - 8 \cdot 3.1 + 16}{3.1^2 - 8 \cdot 3.1 + 15} \infty = \frac{+}{-} \infty = -\infty$$



$x = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 8x + 15} \stackrel{x=4.9}{=} \frac{4.9^2 - 8 \cdot 4.9 + 16}{4.9^2 - 8 \cdot 4.9 + 15} \infty = \frac{+}{-} \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 8x + 15} \stackrel{x=5.1}{=} \frac{5.1^2 - 8 \cdot 5.1 + 16}{5.1^2 - 8 \cdot 5.1 + 15} \infty = \frac{+}{+} \infty = +\infty$$



$y = 1$

$$x = -1000 \rightarrow f(-1000) = \frac{(-1000)^2 - 8 \cdot (-1000) + 16}{(-1000)^2 - 8 \cdot (-1000) + 15} = \frac{1008016}{1008015} \cong 1.000...$$

$$x = 1000 \rightarrow f(1000) = \frac{1000^2 - 8 \cdot 1000 + 16}{1000^2 - 8 \cdot 1000 + 15} = \frac{992016}{992015} \cong 1.000...$$



OPCIÓN B**Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas**

Problema 3. Probamos una vacuna contra la gripe en un grupo de 400 personas, de las que 180 son hombres y 220 mujeres. De las mujeres, 25 contraen la gripe y de los hombres 23. Calcula las siguientes probabilidades:

- Que al seleccionar una persona al azar resulte que no tiene gripe.
- Que al seleccionar una persona al azar resulte ser una mujer que no tiene gripe.
- Que seleccionada una persona al azar que no tiene gripe, resulte ser hombre.
- Que seleccionada una mujer al azar, resulte no tener gripe.

Solución:

Utilizando los siguientes sucesos:

H = la persona seleccionada es hombre

M = la persona seleccionada es mujer

G = la persona seleccionada tiene gripe

Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla:

	G	$\bar{G}$	total
H	23		180
M	25		220

Completando la tabla:

	G	$\bar{G}$	total
H	23	157	180
M	25	195	220
total	48	352	400

Calculemos cada una de las probabilidades pedidas,

$$a) P(\bar{G}) = \frac{352}{400} = 0.88$$

$$b) P(M \cap \bar{G}) = \frac{195}{400} = 0.4875$$

$$c) P\left(\frac{H}{\bar{G}}\right) = \frac{P(H \cap \bar{G})}{P(\bar{G})} = \frac{\frac{157}{400}}{\frac{352}{400}} = \frac{157}{352} = 0.4460227... \approx 0.4460$$

$$d) P\left(\frac{\bar{G}}{M}\right) = \frac{195}{220} = 0.8863636... \approx 0.8864$$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Cierta persona invierte un total de 7000 € en acciones de las empresas A y B y en un depósito a 12 meses al 1 %. Pasado un año, vende sus acciones, obteniendo una rentabilidad del 5 % en las acciones de la empresa A y del 3 % en las de B. El beneficio total de sus tres inversiones es 202 €. Determina qué cantidad destinó a cada inversión si sabemos que el dinero total destinado a comprar acciones superó en 2600 € al dinero del depósito.

Solución:

Llamando: x = cantidad invertida en acciones de la empresa A
 y = cantidad invertida en acciones de la empresa B
 z = cantidad invertida en el depósito a 12 meses

Escribamos las ecuaciones correspondientes al enunciado del problema:

“invierte un total de 7000€” $\rightarrow x + y + z = 7000$

Pasado un año,

“rentabilidad del 5% en acciones de la empresa A” $\rightarrow 0'05 x$

“rentabilidad del 3% en acciones de la empresa B” $\rightarrow 0'03 y$

“rentabilidad del 1% en depósito” $\rightarrow 0'01 z$

“el beneficio total de las tres inversiones es de 202€” $\rightarrow 0'05 x + 0'03 y + 0'01 z = 202 \rightarrow$
(multiplicando por 100) $5x + 3y + z = 20200$

“el dinero total destinado a comprar acciones superó en 2600€ al dinero del depósito” $\rightarrow x + y = 2600 + z$
 $x + y - z = 2600$

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} x + y + z = 7000 \\ 5x + 3y + z = 20200 \\ x + y - z = 2600 \end{cases}$$
 Lo resolvemos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7000 \\ 5 & 3 & 1 & 20200 \\ 1 & 1 & -1 & 2600 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - 5F_1 \\ F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7000 \\ 0 & -2 & -4 & -14800 \\ 0 & 0 & -2 & -4400 \end{array} \right), \text{ podemos resolver el sistema:}$$

De $F_3 \rightarrow -2z = -4400 \rightarrow z = \frac{-4400}{-2} = 2200$

De $F_2 \rightarrow -2y - 4z = -14800$, sustituyendo el valor de z obtenido antes,
 $-2y - 4 \cdot 2200 = -14800$
 $-2y - 8800 = -14800$
 $-2y = -14800 + 8800$
 $-2y = -6000$
 $y = \frac{-6000}{-2} = 3000$

De $F_1 \rightarrow x + y + z = 7000$, sustituyendo el valor de z e y obtenidos anteriormente,
 $x + 3000 + 2200 = 7000$
 $x + 5200 = 7000$
 $x = 7000 - 5200$
 $x = 1800$

Solución: Destinó 1800€ a acciones de la empresa A, 3000€ a acciones de la empresa B y 2200€ en un depósito a 12 meses.

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & 2 \leq x < 5 \\ x^2 - 3x - 8 & 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$

- Calcula el valor de a para el que $f(x)$ es continua en el intervalo $[2, 7]$.
- Para $a = 15$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en el intervalo $[2, 7]$.
- Calcula $\int_5^6 f(x) dx$.

Solución:

a) ¿ a ? / $f(x)$ sea continua en $[2, 7]$

Para $2 \leq x < 5$, $f(x) = \frac{a}{x}$, como $x \neq 0$, $f(x)$ es continua.

Para $5 < x \leq 7$, $f(x) = x^2 - 3x - 8$, como $f(x)$ es un polinomio, $f(x)$ es continua.

Veamos la continuidad en $x = 5$,

$$1) f(5) = 5^2 - 3 \cdot 5 - 8 = 25 - 15 - 8 = 2, \text{ luego } \exists f(5)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{a}{x} = \frac{a}{5} \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (x^2 - 3x - 8) = 5^2 - 3 \cdot 5 - 8 = 2 \end{cases}, \text{ para que exista el límite deben coincidir}$$

los dos límites laterales, es decir, $\frac{a}{5} = 2 \rightarrow a = 10$.

Por tanto, para $a = 10$ se cumple: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$, luego $f(x)$ es continua en $x = 5$.

Solución: $f(x)$ es continua en $[2, 7]$ para $a = 10$.

b) $a = 15$, ¿monotonía de $f(x)$ en $[2, 7]$?

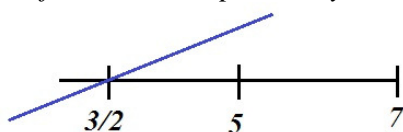
$$f(x) = \begin{cases} \frac{15}{x} & 2 \leq x < 5 \\ x^2 - 3x - 8 & 5 \leq x \leq 7 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{15}{x^2} & 2 < x < 5 \\ 2x - 3 & 5 < x < 7 \end{cases}$$

Para $2 < x < 5$, $f'(x) = -\frac{15}{x^2}$, por tanto, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

Para $5 < x < 7$, $f'(x) = 2x - 3$,

$$2x - 3 = 0, \quad 2x = 3, \quad x = 3/2$$

Estudiamos el signo de $2x - 3$ en $[5, 7]$: $2x - 3$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo y raíz $3/2$, gráficamente:



Por tanto, entre 5 y 7 $2x - 3$ es positivo; luego $f'(x)$ es positiva.

Para $5 < x < 7$, $f(x)$ es creciente.

Solución: $f(x)$ es decreciente en $(2, 5)$ y creciente en $(5, 7)$.

c) ¿ $\int_5^6 f(x) dx$?

Entre 5 y 6, $f(x) = x^2 - 3x - 8$, por tanto

$$\begin{aligned}\int_5^6 f(x) dx &= \int_5^6 (x^2 - 3x - 8) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} - 8x \right]_5^6 = \left(\frac{6^3}{3} - 3\frac{6^2}{2} - 8 \cdot 6 \right) - \left(\frac{5^3}{3} - 3\frac{5^2}{2} - 8 \cdot 5 \right) = \\ &= (72 - 54 - 48) - \left(\frac{125}{3} - \frac{75}{2} - 40 \right) = -30 - \left(\frac{250 - 225}{6} - 40 \right) = -30 - \frac{25}{6} + 40 = 10 - \frac{25}{6} = \frac{60 - 25}{6} = \frac{35}{6} \approx 5.8333\end{aligned}$$

Solución: $\int_5^6 f(x) dx = \frac{35}{6}$

Tu Profecia al Rescate

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. La probabilidad de que ocurra el contrario de un suceso A es $1/3$; la probabilidad de un suceso B es $3/4$ y la probabilidad de que ocurran a la vez los sucesos A y B es $5/8$.

- Calcula la probabilidad de que ocurra el suceso A o el suceso B.
- Calcula la probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B.
- Calcula la probabilidad de que ocurra A, sabiendo que ha ocurrido B.
- ¿Son independientes los sucesos A y B? Razona tu respuesta.

Solución:

De los datos del enunciado sabemos que $P(\overline{A}) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ y $P(A \cap B) = \frac{5}{8}$

Como $P(\overline{A}) = \frac{1}{3} \rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

a) Probabilidad de que ocurra el suceso A o el suceso B, es decir, $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{16 + 18 - 15}{24} = \frac{19}{24}$$

b) Probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B, es decir, $P(\overline{A \cup B})$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{19}{24} = \frac{5}{24}$$

c) Probabilidad de que ocurra A, sabiendo que ha ocurrido B, es decir, $P(A/B)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

d) ¿Son independientes los sucesos A y B?

Dos sucesos son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Veamos si los sucesos A y B cumplen esta condición.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = \frac{5}{8} \\ P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} \end{array} \right\} \rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Por tanto, los sucesos A y B no son independientes.