

Modelo 4 de 2002

Estudio de funciones, polinomios, matrices y geometría analítica en el espacio.

Opción A - Ejercicio 1

El dominio es $\mathbb{R}$, pues $x^2 + 1 > 0$ para todo real. El exponente tiende a 0 cuando $x \rightarrow \pm\infty$, así que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = e^0 = 1;$$

la recta $y = 1$ es asíntota horizontal en ambos extremos. No hay asíntotas verticales porque f está definida y es continua en toda la recta. Para estudiar la monotonía derivamos usando la regla de la cadena:

$$f'(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

Los factores distintos de $1-x^2$ son siempre positivos; los puntos críticos son $x = \pm 1$. La derivada es negativa en $(-\infty, -1)$, positiva en $(-1, 1)$ y negativa en $(1, \infty)$. Por ello, f decrece, crece y vuelve a decrecer. Tiene mínimo relativo $f(-1) = e^{-1}$ y máximo relativo $f(1) = e$. **Opción A - Ejercicio 2**

Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$. De $P(0) = 1$ se obtiene $c = 1$, y de $P(2) = 1$ resulta $4a + 2b + 1 = 1$, es decir, $b = -2a$. La condición de integral da

$$\int_0^2 P(x) dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + x \right]_0^2 = \frac{8a}{3} + 2b + 2 = \frac{1}{3}.$$

Al sustituir $b = -2a$ se obtiene $a = 5/4$ y $b = -5/2$. Así,

$$P(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 1.$$

Opción A - Ejercicio 3

Como A es simétrica, escribimos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. La igualdad matricial proporciona

$$2a - b = -4, \quad 2b - d = 1.$$

De aquí, $b = 2a + 4$ y $d = 4a + 7$. Usamos la condición del determinante:

$$-7 = ad - b^2 = a(4a + 7) - (2a + 4)^2 = -9a - 16,$$

por lo que $a = -1$, $b = 2$ y $d = 3$. La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Su determinante $-3 - 4 = -7$ confirma la condición dada. **Opción A - Ejercicio 4**

La recta s se parametriza como $(x, y, z) = (3t, t + 2, t - 1)$. Al sustituir en $\pi : x + y - z + 6 = 0$ se obtiene $3t + 9 = 0$, luego $t = -3$ y el punto de intersección es $P = (-9, -1, -4)$. La recta r tiene normales $n_1 = (3, 1, 0)$ y $n_2 = (4, -3, 1)$, por lo que un vector director suyo es

$$d = n_1 \times n_2 = (1, -3, -13).$$

La recta pedida pasa por P y es paralela a r . En forma paramétrica:

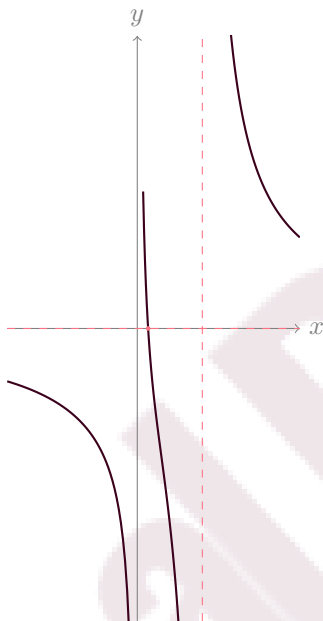
$$(x, y, z) = (-9, -1, -4) + t(1, -3, -13), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 1

El dominio excluye los ceros del denominador: $x \neq 0, 2$. En ambos puntos el numerador no se anula, por lo que son asíntotas verticales. Los límites laterales son $-\infty$ y $+\infty$ en cada asíntota (por el cambio de signo del denominador). Como el grado del denominador es mayor que el del numerador, $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \pm\infty$. El signo de la derivada es

$$f'(x) = \frac{-9x^2 + 6x - 6}{(x^2 - 2x)^2}.$$

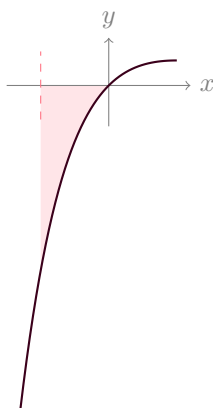
El denominador es positivo y $9x^2 - 6x + 6$ siempre es positivo, pues su discriminante es $36 - 216 < 0$ y su coeficiente principal es positivo. Luego $f'(x) < 0$ en todo el dominio: la función decrece en $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, \infty)$. El único corte con el eje x es $x = 1/3$.



Opción B - Ejercicio 2

La función $f(x) = xe^{-x}$ corta al eje x en $x = 0$ y, para $-1 \leq x < 0$, queda por debajo de dicho eje. El área encerrada se calcula invirtiendo el signo de la integral en ese intervalo:

$$\int_{-1}^0 xe^{-x} dx = [-(x+1)e^{-x}]_{-1}^0 = -1, \quad \boxed{S = 1}.$$



Opción B - Ejercicio 3

Reordenamos $AX = X - B$ como $(I - A)X = B$. En este caso

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(I - A) = 2 \neq 0,$$

por lo que la solución es única. Su inversa y el producto dan

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad X = (I - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Tomamos dos vectores con origen en A :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -1, -3), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (0, -4, 0).$$

El área del triángulo es la mitad del módulo de su producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-12, 0, 0), \quad S = \frac{1}{2} \sqrt{(-12)^2} = \boxed{6}.$$