

Modelo de prueba de 2025

Resolución de los siete ejercicios, incluidos todos los enunciados optativos.

Ejercicio 1

Sean $x, y \geq 0$ los números, con $x + y = 1$. Para maximizar el producto de uno de ellos por la raíz del otro, tomamos $P(x) = x\sqrt{1-x}$, con $0 \leq x \leq 1$. En el interior,

$$P'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

El único punto crítico interior es $x = 2/3$, que da $y = 1/3$. En los extremos el producto es 0, así que el máximo se alcanza en ese punto:

$$x = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad P_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Ejercicio 2

Tomamos dos vectores del plano determinado por A, B, C :

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1), \quad \overrightarrow{AC} = (3, 1, 0).$$

Su producto vectorial es $(-1, 3, -2)$, un vector normal. Usando el punto $A = (-1, 0, 0)$, la ecuación del plano es

$$-x + 3y - 2z - 1 = 0.$$

La recta se expresa paramétricamente como $(x, y, z) = (3 + 2t, 2 + t, t)$. La distancia de un punto de ella al plano resulta

$$\frac{|-(3 + 2t) + 3(2 + t) - 2t - 1|}{\sqrt{14}} = \frac{|2 - t|}{\sqrt{14}}.$$

Igualemos a $\sqrt{14}$: $|2 - t| = 14$, luego $t = 16$ o $t = -12$. Los puntos pedidos son

$$(35, 18, 16) \quad \text{y} \quad (-21, -10, -12).$$

Ejercicio 3

En un paralelogramo de vértices consecutivos P, Q, R, S , se cumple $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$, así que

$$S = P + R - Q = (-1, 2, 3) + (0, 5, 1) - (-2, 1, 0) = (1, 6, 4).$$

Para el plano PQR calculamos

$$\overrightarrow{PQ} = (-1, -1, -3), \quad \overrightarrow{PR} = (1, 3, -2), \quad \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (11, -5, -2).$$

Este vector normal también da la dirección de la recta por el origen perpendicular al plano. En forma paramétrica:

$$x = 11t, \quad y = -5t, \quad z = -2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 4

La matriz A es triangular superior, estrictamente por encima de la diagonal, de modo que $A^3 = O$; en particular, $A^{10} = O$.

Para invertir $I + A + A^2$, usamos la identidad de suma geométrica de matrices:

$$(I + A + A^2)(I - A) = I - A^3 = I.$$

Por tanto, la inversa existe y es $I - A$:

$$(I + A + A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & b \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5

Ponemos $t = \lambda - 1$. Entonces

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det M = -(t-1)(t-2) = -(\lambda-2)(\lambda-3).$$

La matriz tiene rango menor que 3 exactamente cuando este determinante es cero; por tanto, $\lambda = 2$ o $\lambda = 3$.

Para $\lambda = -1$, $t = -2$ y el sistema homogéneo es

$$x + y - 2z = 0, \quad x - 2y + z = 0, \quad -2x + y + z = 0.$$

Las dos primeras ecuaciones implican $y = z$ y $x = z$; la tercera queda satisfecha. Así, sus soluciones son

$$(x, y, z) = s(1, 1, 1), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 6

Como $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de f , se tiene $f(x) = 2xe^{x^2}$. Derivamos para comprobar la monotonía:

$$f'(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = 2e^{x^2}(1 + 2x^2) > 0 \quad \text{para todo } x.$$

Luego f es creciente en $\mathbb{R}$.

La función corta el eje de abscisas en $x = 0$ y es positiva en $[0, 1]$. El área limitada por su gráfica, el eje y la recta $x = 1$ es

$$A = \int_0^1 2xe^{x^2} dx = [e^{x^2}]_0^1 = e - 1.$$

Ejercicio 7

Sea X el consumo en litros por cada 100 km, con $X \sim N(6, 1.2)$.

a) Tipificamos 7:

$$z = \frac{7-6}{1.2} = 0.8333\dots, \quad P(X \geq 7) = 1 - \Phi(0.8333\dots) \approx 1 - 0.7977 = 0.2023.$$

Aproximadamente el 20.23% de los coches consume al menos 7 litros.

b) Para que un modelo sea más eficiente que el 95% del mercado, su consumo debe estar por debajo del percentil 5. De la tabla normal, $z_{0.05} \approx -1.6449$. Por tanto,

$$x = 6 + 1.2(-1.6449) = 4.0261.$$

El consumo máximo es 4.0261 litros por cada 100 km.