

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Junio de 2021 · Convocatoria ordinaria

Se resuelven los seis problemas para ofrecer una propuesta completa.

Problema 1 · Compra de piensos

Cada uno de los 100 animales necesita diariamente 5 kg de pienso animal y 3 kg de pienso vegetal. Para una semana, las necesidades mínimas son 3500 kg y 2100 kg, respectivamente. Sean x e y los sacos semanales de las marcas A y B. Las restricciones y el coste son

$$7x + 6y \geq 3500, \quad 3x + 4y \geq 2100, \quad x, y \geq 0, \quad C(x, y) = 12x + 11y.$$

Como el coste es lineal, su mínimo en la región factible se alcanza en un vértice. Hallamos primero el cruce de las dos rectas límite:

$$\begin{cases} 7x + 6y = 3500, \\ 3x + 4y = 2100 \end{cases} \implies (x, y) = (140, 420).$$

Los otros vértices sobre los ejes son $(700, 0)$ y $(0, 3500/6)$. Comparamos el coste en ellos y en la intersección:

$$C(700, 0) = 8400, \quad C(0, 3500/6) = \frac{19250}{3}, \quad C(140, 420) = 6300.$$

El menor valor corresponde al cruce. Por tanto,

Comprar 140 sacos A y 420 sacos B; $C_{\min} = 6300$ € por semana.

Problema 2 · Número de trabajadores por categoría

Sean x, y, z los números de trabajadores de las categorías A, B y C. El número total y el gasto actual dan dos ecuaciones. El gasto del mes próximo es $0,98(62000) = 60760$ €; los nuevos salarios son 832, 1000 y 1800 €:

$$\begin{cases} x + y + z = 57, \\ 800x + 1000y + 2000z = 62000, \\ 832x + 1000y + 1800z = 60760. \end{cases}$$

Restando 800 veces la primera ecuación de la segunda y 832 veces la primera de la tercera, y simplificando la primera relación resultante, queda

$$\begin{cases} y + 6z = 82, \\ 168y + 968z = 13336. \end{cases}$$

Restamos 168 veces la primera ecuación a la segunda:

$$-40z = -440 \implies z = 11.$$

Entonces $y = 82 - 6(11) = 16$ y $x = 57 - 16 - 11 = 30$. Las cantidades son enteras no negativas y satisfacen los datos del enunciado:

$x = 30$ trabajadores A, $y = 16$ trabajadores B, $z = 11$ trabajadores C.

Problema 3 · Estudio de una función racional

La función es

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 - 4}.$$

a) El denominador se anula en $x = \pm 2$, así que

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

El numerador se anula en $x = \pm 1$, que da los cortes $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. Para el eje Y, $f(0) = 1/4$, así que el corte es $(0, 1/4)$.

b) El numerador tiende a -3 en los puntos excluidos; los límites laterales tienen signos opuestos en cada uno. Por tanto, $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales. En ambos infinitos, el cociente de los coeficientes principales tiende a -1 , de modo que la asíntota horizontal es $y = -1$.

c) y d) El signo de la derivada determina los intervalos de variación:

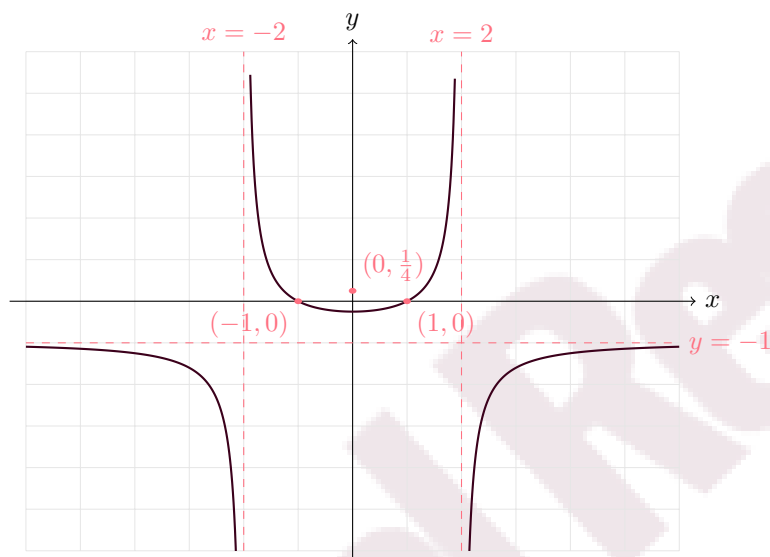
$$f'(x) = \frac{-2x(x^2 - 4) - (1 - x^2)2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{6x}{(x^2 - 4)^2}.$$

El denominador es positivo en el dominio, de modo que el signo depende de x . Al separar también los puntos excluidos, f decrece en $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0)$, y crece en $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$. En $x = 0$ la derivada cambia de negativa a positiva, así que hay un mínimo local:

$$f(0) = \frac{1}{4}.$$

No hay máximo local.

e) La representación reúne las asíntotas y los cortes calculados:



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}; \quad (-1, 0), (1, 0), (0, \tfrac{1}{4}); \quad x = \pm 2, y = -1; \quad \min_{\text{loc}} f = (0, \tfrac{1}{4}).$$

Problema 4 · Capacidad de una explotación gasística

La capacidad, en miles de metros cúbicos, viene dada por $f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2$, donde $x \geq 0$ son los años transcurridos desde 1980.

a) Al inicio de 1980, $x = 0$:

$$f(0) = 36600 \text{ miles de m}^3.$$

b) La parábola abre hacia abajo, así que su vértice da el máximo. Derivamos para hallar cuándo se alcanza:

$$f'(x) = 1500 - 30x = 0 \implies x = 50.$$

La derivada pasa de positiva a negativa en 50, por lo que es un máximo. Su capacidad es

$$f(50) = 36600 + 1500(50) - 15(50)^2 = 74100 \text{ miles de m}^3.$$

c) La explotación deja de ser rentable cuando el beneficio por metro cúbico deja de ser positivo. Resolvemos $g(x) = 0$:

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100} = 0 \implies x^2 = 12100 \implies x = 110,$$

tomando la raíz positiva porque x representa tiempo. En ese momento,

$$f(110) = 36600 + 1500(110) - 15(110)^2 = 20100 \text{ miles de m}^3.$$

$$f(0) = 36\,600; \quad f(50) = 74\,100; \quad f(110) = 20\,100 \quad (\text{miles de m}^3).$$

Problema 5 · Probabilidad e independencia

Los datos son $P(A) = 0,4$, $P(B | A) = 0,25$ y $P(B^c) = 0,75$. Primero calculamos la intersección y la probabilidad de B :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A) = 0,4(0,25) = 0,1, \quad P(B) = 1 - 0,75 = 0,25.$$

a) Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Aquí $0,1 = 0,4(0,25)$, así que sí son independientes.

b) Para la unión usamos la fórmula de inclusión-exclusión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,25 - 0,1 = 0,55.$$

c) $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0,3$, luego

$$P(A | B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0,3}{0,75} = 0,4.$$

d) Por las leyes de De Morgan,

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = 0,9, \quad P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 0,45.$$

A y B son independientes; $P(A \cup B) = 0,55$; $P(A | B^c) = 0,4$; $P(A^c \cup B^c) = 0,9$, $P(A^c \cap B^c) = 0,45$.

Problema 6 · Uso de protectores de pantalla

Sean A , M y B los sucesos de que el móvil tenga pantalla de 4, 4,7 y 5 pulgadas, y sea U el suceso «usa protector». Se conoce que $P(A) = 0,3$, $P(U | A) = 0,3$, $P(U | M) = 0,25$, $P(U | B) = 0,4$ y $P(U) = 0,34$.

a) Llamamos $x = P(M)$ e $y = P(B)$. Como solo hay estos tres tamaños, $x + y = 0,7$. Por la probabilidad total,

$$0,34 = 0,3(0,3) + 0,25x + 0,4y \implies 0,25x + 0,4y = 0,25.$$

Restando $0,25(x + y) = 0,175$ queda $0,15y = 0,075$, de donde $y = 0,5$ y $x = 0,2$.

b) Aplicamos Bayes para calcular el tamaño del móvil sabiendo que utiliza protector:

$$P(B | U) = \frac{P(B)P(U | B)}{P(U)} = \frac{0,5(0,4)}{0,34} = \frac{10}{17}.$$

c) Al saber que la pantalla no es de 4,7 pulgadas, restringimos los casos a A y B :

$$P(B | U \cap M^c) = \frac{P(B \cap U)}{P(A \cap U) + P(B \cap U)} = \frac{0,5(0,4)}{0,3(0,3) + 0,5(0,4)} = \frac{20}{29}.$$

$$P(M) = 0,2, \quad P(B) = 0,5; \quad P(B | U) = \frac{10}{17}; \quad P(B | U \cap M^c) = \frac{20}{29}.$$