



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{\ln(x+1) + a}{3x+4}$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

- a) **[1 punto]** Determina a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$ es 1.
- b) **[1,5 puntos]** Para $a = 0$, estudia y calcula las asíntotas de f .

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

En una fábrica de pinturas, las latas que se utilizan para envasar la pintura tienen forma cilíndrica y una capacidad de 20 litros. Halla las dimensiones del cilindro, con tapas, para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula una primitiva de la función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctg(\sqrt{x})$ cuya gráfica pase por el punto $(0; 1)$ ($\arctg$ denota la función arco tangente). Sugerencia: efectúa el cambio $x = t^2$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+1)$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta $x = e - 1$.



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS
DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible, la matriz X que

verifica la ecuación $3X - B^t = AX$, siendo B^t la matriz traspuesta de B .

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Una plataforma de streaming se especializa en series de tres géneros: animación, ciencia ficción y comedia. Se sabe que el 30% de las series de animación más el 50% de las de ciencia ficción coincide con el 20% de total de series. El 25% de las series de animación más el 50% de las de ciencia ficción más el 60% de las de comedia representan la mitad del total de series. Hay 100 series menos de animación que de ciencia ficción. Halla el número de series de cada género.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Determina los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ que son equidistantes de los planos OYZ y OXZ .

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 2z = -2 \end{cases}$

a) **[1,5 puntos]** Determina la ecuación del plano paralelo a r que contiene a la recta $-x + 1 = y = \frac{z - 3}{2}$.

b) **[1 punto]** Calcula la distancia entre la recta r y el plano $2x + 5y + 3z = 41$.

SOLUCIONES**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Sea $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{\ln(x+1)+a}{3x+4}$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

- a) **[1 punto]** Determina a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$ es 1.
 b) **[1,5 puntos]** Para $a = 0$, estudia y calcula las asíntotas de f .

- a) La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$ se obtiene con el valor de $f'(0)$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}(3x+4) - 3(\ln(x+1)+a)}{(3x+4)^2} = \frac{\frac{3x+4}{x+1} - 3\ln(x+1) - 3a}{(3x+4)^2}$$

$$f'(0) = \frac{\frac{3 \cdot 0 + 4}{0+1} - 3\ln(0+1) - 3a}{(3 \cdot 0 + 4)^2} = \frac{4 - 3a}{16}$$

Igualamos la pendiente a 1 y obtenemos el valor de a .

$$\frac{4-3a}{16} = 1 \Rightarrow 4-3a = 16 \Rightarrow -3a = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{-3} = -4$$

El valor buscado es $a = -4$.

- b) Para $a = 0$ la función es $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{3x+4}$.

El dominio de esta función son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$$3x+4=0 \Rightarrow 3x=-4 \Rightarrow x = \frac{-4}{3}$$

$x = \frac{-4}{3} \approx -1.33 \notin (-1, +\infty)$. No pertenece al dominio de definición de la función.

El dominio de la función es $(-1, +\infty)$.

Asíntota vertical. $x = a$

No tiene asíntota vertical, pues la función es continua en su dominio de definición $(-1, +\infty)$.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{3x+4} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x+3} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

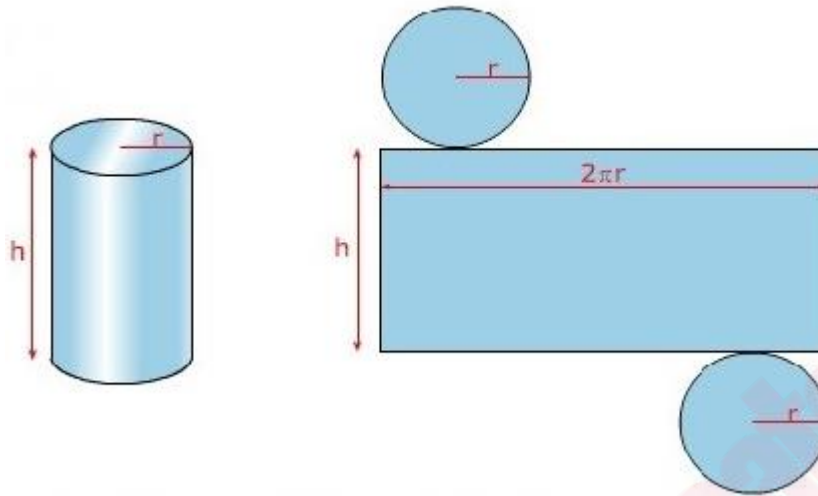
La asíntota horizontal es $y = 0$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Como la función tiene una asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

En una fábrica de pinturas, las latas que se utilizan para envasar la pintura tienen forma cilíndrica y una capacidad de 20 litros. Halla las dimensiones del cilindro, con tapas, para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.



Sabemos que su volumen es 20 litros = 20 000 cm³.

Si el bote de forma cilíndrica tiene un radio de tapa r y una altura h tenemos que su volumen es $Volumen = \text{Área base} \times \text{Altura} = \pi r^2 \cdot h$. Igualamos este volumen a 20000 y despejamos h de la expresión.

$$\pi r^2 \cdot h = 20000 \Rightarrow h = \frac{20000}{\pi r^2}$$

Debemos minimizar la superficie del cilindro que es la suma del área de las dos tapas más el rectángulo del lateral $\rightarrow A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.

Sustituimos en esta expresión h y obtenemos una función superficie que depende solo de r .

$$\left. \begin{array}{l} A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ h = \frac{20000}{\pi r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{20000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{40000}{r}$$

Derivamos esta función, la igualamos a cero y obtenemos sus puntos críticos.

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{40000}{r} \Rightarrow A'(r) = 4\pi r - \frac{40000}{r^2}$$

$$A'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r - \frac{40000}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{40000}{r^2} \Rightarrow 4\pi r^3 = 40000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{40000}{4\pi} = \frac{10000}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}} \approx 14.71 \text{ cm}$$

Averiguamos si es un mínimo viendo la evolución de la derivada antes y después de dicho valor.

En el intervalo $\left(0, \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}}\right)$ tomamos $r = 1$ y la derivada vale

$$A'(1) = 4\pi - \frac{40000}{1^2} = -39987.4 < 0, \text{ La función decrece en } \left(0, \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}}\right).$$

En el intervalo $\left(\sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}}, +\infty\right)$ tomamos $r = 20$ y la derivada vale

$$A'(20) = 80\pi - \frac{40000}{20^2} = 80\pi - 100 = 151.3 > 0, \text{ La función crece en } \left(\sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}}, +\infty\right).$$

Como la función decrece antes de $r = \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}} \approx 14.71 \text{ cm}$ y crece después tenemos que la función superficie presenta un valor mínimo para $r = \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}} \approx 14.71 \text{ cm}$.

Para $r = \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}}$ la altura vale

$$h = \frac{20000}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}}\right)^2} = \frac{20000}{\pi \sqrt[3]{100000000}} = \frac{20000 \sqrt[3]{\pi^2}}{100 \sqrt[3]{\pi^3} \sqrt[3]{100}} = \frac{200}{\sqrt[3]{100\pi}} \approx 29.42 \text{ cm}$$

El bote de 20 litros con forma cilíndrica y superficie mínima tiene radio $r = \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}} \approx 14.71 \text{ cm}$

y altura de $h = \frac{200}{\sqrt[3]{100\pi}} \approx 29.42 \text{ cm}$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula una primitiva de la función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctg(\sqrt{x})$ cuya gráfica pase por el punto $(0; 1)$ ($\arctg$ denota la función arco tangente). Sugerencia: efectúa el cambio $x = t^2$.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int \arctg(\sqrt{x}) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt \end{array} \right\} = \int \arctg(\sqrt{t^2}) 2t dt = \\
 &= \int 2t \cdot \arctg(t) dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \arctg(t) \rightarrow du = \frac{1}{1+t^2} dt \\ dv = 2t dt \rightarrow v = \int 2t dt = t^2 \end{array} \right\} = t^2 \arctg(t) - \int t^2 \frac{1}{1+t^2} dt = \\
 &= t^2 \arctg(t) - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = t^2 \arctg(t) - \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt = \\
 &= t^2 \arctg(t) - \int \frac{1+t^2}{1+t^2} dt + \int \frac{1}{1+t^2} dt = t^2 \arctg(t) - \int dt + \int \frac{1}{1+t^2} dt = \\
 &= t^2 \arctg(t) - t + \arctg(t) = \left\{ x = t^2 \rightarrow t = \sqrt{x} \right\} = \boxed{x \arctg(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctg(\sqrt{x}) + C}
 \end{aligned}$$

Las primitivas de la función son $F(x) = x \arctg(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctg(\sqrt{x}) + C$. Como la primitiva debe pasar por el punto $(0, 1)$ entonces debe cumplirse que $F(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} F(0) = 0 \cdot \arctg(\sqrt{0}) - \sqrt{0} + \arctg(\sqrt{0}) + C = C \\ F(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{C=1}$$

La primitiva buscada es $F(x) = x \arctg(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctg(\sqrt{x}) + 1$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+1)$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta $x = e-1$.

Buscamos los puntos de corte de la función $f(x) = \ln(x+1)$ y la recta $x = e-1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln(x+1) \\ x = e-1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(e-1) = \ln(e-1+1) = \ln e = 1$$

El punto de corte es $(e-1, 1)$.

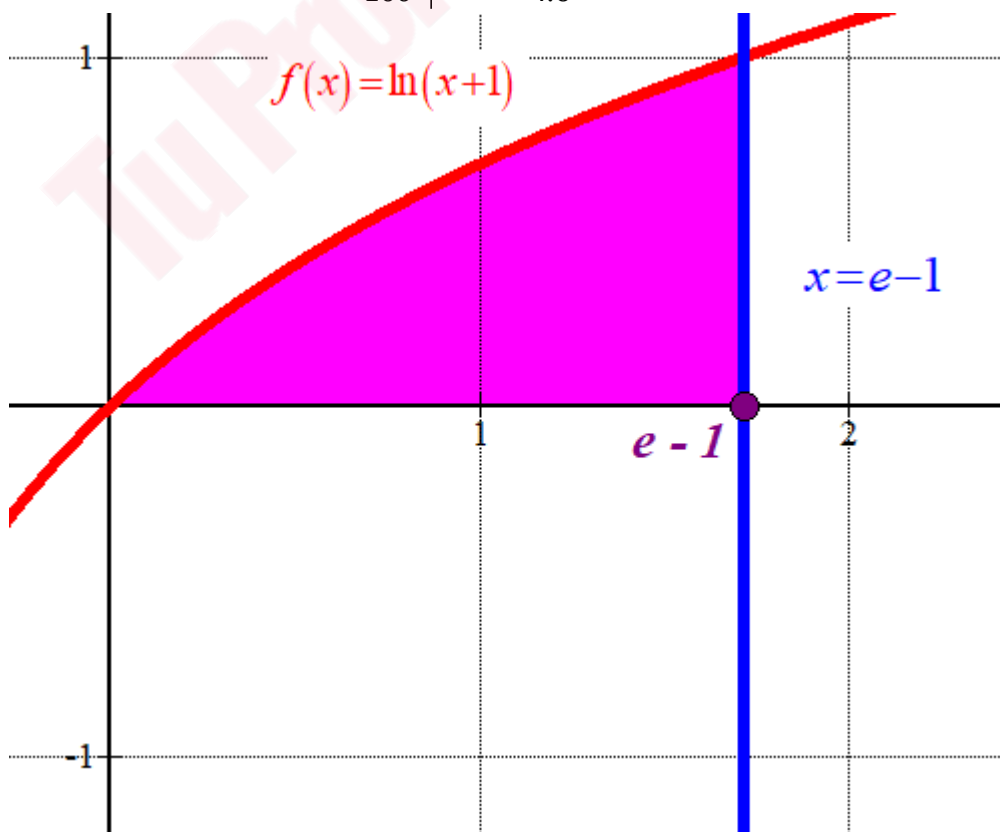
Hallamos el punto de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln(x+1) \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ln(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 = e^0 = 1 \Rightarrow x = 0$$

El punto de corte es $(0, 0)$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la función.

x	$f(x) = \ln(x+1)$
0.5	0.4
0	0
$e-1$	1
10	2.4
100	4.6



Calculamos el área de la región pintada de rosa como la integral definida de 0 a $e-1$ de $f(x) = \ln(x+1)$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned}\int \ln(x+1) dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x+1) \rightarrow du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln(x+1) - \int x \frac{1}{x+1} dx = \\ &= x \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx = x \ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \\ &= x \ln(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = x \ln(x+1) - \int dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \\ &= \boxed{x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C}\end{aligned}$$

Aplicamos este resultado al cálculo del área.

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx = \left[x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) \right]_0^{e-1} = \\ &= \left[(e-1) \ln(e-1+1) - (e-1) + \ln(e-1+1) \right] - \left[0 \cdot \ln(0+1) - 0 + \ln(0+1) \right] = \\ &= e-1-e+1+1-0 = \boxed{1 \text{ u}^2}\end{aligned}$$

El área tiene un valor de 1 unidad cuadrada.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible, la matriz X que verifica la ecuación $3X - B^t = AX$, siendo B^t la matriz traspuesta de B .

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$3X - B^t = AX \Rightarrow 3X - AX = B^t \Rightarrow (3I - A)X = B^t \Rightarrow X = (3I - A)^{-1} B^t$$

Hallamos la inversa de la matriz $3I - A$.

$$3I - A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|3I - A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 - 4 - (0 + 0 + 1) = 1 \neq 0$$

$$(3I - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(3I - A)^t}{|3I - A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(3I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$X = (3I - A)^{-1} B^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 3+2-5 \\ -6+0-5 & -18-12+25 \\ 2+0+2 & 6+5-10 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 3 \times 2$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -11 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Una plataforma de streaming se especializa en series de tres géneros: animación, ciencia ficción y comedia. Se sabe que el 30% de las series de animación más el 50% de las de ciencia ficción coincide con el 20% de total de series. El 25% de las series de animación más el 50% de las de ciencia ficción más el 60% de las de comedia representan la mitad del total de series. Hay 100 series menos de animación que de ciencia ficción. Halla el número de series de cada género.

Llamamos “x” al número de series de animación, “y” al número de series de ciencia ficción y “z” al número de series de comedia.

“Se sabe que el 30% de las series de animación más el 50% de las de ciencia ficción coincide con el 20% de total de series” $\rightarrow 0.30x + 0.50y = 0.20(x + y + z)$.

“El 25% de las series de animación más el 50% de las de ciencia ficción más el 60% de las de comedia representan la mitad del total de series” $\rightarrow 0.25x + 0.50y + 0.60z = \frac{x + y + z}{2}$.

“Hay 100 series menos de animación que de ciencia ficción” $\rightarrow x = y - 100$.

Juntamos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 0.30x + 0.50y = 0.20(x + y + z) \\ 0.25x + 0.50y + 0.60z = \frac{x + y + z}{2} \\ x = y - 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.30x + 0.50y = 0.20x + 0.20y + 0.20z \\ 0.5x + y + 1.2z = x + y + z \\ x = y - 100 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 0.10x + 0.30y - 0.20z = 0 \\ \Rightarrow -0.5x + 0.2z = 0 \\ x = y - 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.10(y - 100) + 0.30y - 0.20z = 0 \\ -0.5(y - 100) + 0.2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.10y - 10 + 0.30y - 0.20z = 0 \\ -0.5y + 50 + 0.2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.40y - 0.20z = 10 \\ -0.5y + 0.2z = -50 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y - 2z = 100 \\ -5y + 2z = -500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y - z = 50 \\ -5y + 2z = -500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y - 50 = z \\ -5y + 2z = -500 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y + 2(2y - 50) = -500 \Rightarrow -5y + 4y - 100 = -500 \Rightarrow -y = -400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 400} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 400 - 100 = 300} \\ \boxed{z = 2 \cdot 400 - 50 = 750} \end{array} \right.$$

Hay 300 series de animación, 400 de ciencia ficción y 750 de comedia.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Determina los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ que son equidistantes de los planos OYZ y OXZ .

El plano OYZ tiene ecuación $OYZ \equiv x = 0$, el plano OXZ tiene ecuación $OXZ \equiv y = 0$.
Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y - z + 3y - 1 = 0 \Rightarrow 4y - z - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y - 1 = z \Rightarrow x = y - (4y - 1) = y - 4y + 1 = 1 - 3y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Un punto perteneciente a la recta r tiene coordenadas $P(1 - 3\lambda, \lambda, -1 + 4\lambda)$.

Hallamos la distancia del punto P al plano OYZ .

$$\left. \begin{matrix} P(1 - 3\lambda, \lambda, -1 + 4\lambda) \\ OYZ \equiv x = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow d(P, OYZ) = \frac{|1 - 3\lambda|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = |1 - 3\lambda|$$

Hallamos la distancia del punto P al plano OXZ .

$$\left. \begin{matrix} P(1 - 3\lambda, \lambda, -1 + 4\lambda) \\ OXZ \equiv y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow d(P, OXZ) = \frac{|\lambda|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = |\lambda|$$

Igualemos las distancias y determinamos el valor de λ .

$$d(P, OYZ) = d(P, OXZ) \Rightarrow |1 - 3\lambda| = |\lambda| \Rightarrow \begin{cases} 1 - 3\lambda = \lambda \rightarrow 1 = 4\lambda \rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \\ 1 - 3\lambda = -\lambda \rightarrow 1 = 2\lambda \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Si } \lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow P\left(1 - 3\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1 + 4\frac{1}{4}\right) \Rightarrow P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$$

$$\text{Si } \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow P\left(1 - 3\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 + 4\frac{1}{2}\right) \Rightarrow P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Los dos puntos de la recta r equidistantes de los planos OYZ y OXZ son:

$$P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right) \text{ y } P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 2z = -2 \end{cases}$

a) **[1,5 puntos]** Determina la ecuación del plano paralelo a r que contiene a la recta

$$-x + 1 = y = \frac{z - 3}{2}.$$

b) **[1 punto]** Calcula la distancia entre la recta r y el plano $2x + 5y + 3z = 41$.

a) Un plano paralelo a la recta r tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta.

Hallamos un vector director de la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z + 1 \\ 3x - 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow 3(y - z + 1) - 2z = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y - 3z + 3 - 2z = -2 \Rightarrow 3y - 5z = -5 \Rightarrow 3y = -5 + 5z \Rightarrow y = \frac{-5}{3} + \frac{5}{3}z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5}{3} + \frac{5}{3}z - z + 1 = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3}z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \frac{-5}{3} + \frac{5}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1 \right) \Rightarrow \boxed{\vec{u}_r = (2, 5, 3)}$$

Hallamos un punto y el vector director de la recta $s \equiv -x + 1 = y = \frac{z - 3}{2}$.

$$-x + 1 = y = \frac{z - 3}{2} \Rightarrow \frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_s(1, 0, 3) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 2) \end{cases}$$

El plano π paralelo a la recta r y que contiene la recta s tiene como vectores directores los vectores $\vec{u}_r = (2, 5, 3)$, $\vec{v}_s = (-1, 1, 2)$ y pasa por el punto $P_s(1, 0, 3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_r = (2, 5, 3) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (-1, 1, 2) \\ P_s(1, 0, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10(x - 1) - 3y + 2(z - 3) + 5(z - 3) - 4y - 3(x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7(x - 1) + 7(z - 3) - 7y = 0 \Rightarrow 7x - 7 + 7z - 21 - 7y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x - 7y + 7z - 28 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - y + z - 4 = 0}$$

b) Estudiamos la posición relativa de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 5y + 3z = 41 \Rightarrow \vec{n} = (2, 5, 3) \\ \vec{u}_r = (2, 5, 3) \end{array} \right\}$$

El vector normal del plano y el vector director de la recta son el mismo, por lo que la recta y plano son perpendiculares y la distancia entre ambos no tiene sentido.

