

Se desarrollan las dos opciones; las gráficas se construyen a partir de los puntos de corte y las expresiones de las funciones.

Opción A - Ejercicio 1

La tangente en $(1, 0)$ tiene pendiente -3 , y el punto de inflexión obliga a que $f(1) = 0$ y $f''(1) = 0$. Para $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$:

$$a + b + c = 0, \quad 6a + 2b = 0, \quad 3a + 2b + c = -3.$$

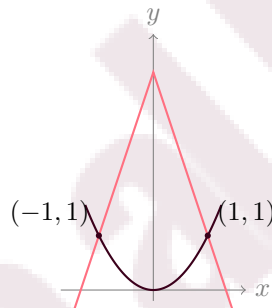
De la segunda ecuación, $b = -3a$; al sustituir en las otras se obtiene $a = 3$, $b = -9$ y $c = 6$. Así,

$$f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x.$$

Opción A - Ejercicio 2

Los puntos de corte satisfacen $x^2 = 4 - 3|x|$. Si $u = |x| \geq 0$, entonces $u^2 + 3u - 4 = 0$, cuya única raíz admisible es $u = 1$. Los cortes son $(-1, 1)$ y $(1, 1)$. Entre ellos la gráfica de f está por encima de la de g , y por simetría:

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^1 (4 - 3x - x^2) dx = 2 \left[4x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \boxed{\frac{13}{3}}.$$



Opción A - Ejercicio 3

De las ecuaciones dadas,

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = S, \quad A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = D.$$

Por separado, el producto pedido es

$$(A + B)(A - B) = SD = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Además, $A = (S + D)/2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = (S - D)/2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Luego

$$A^2 = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - B^2 = \boxed{\begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}}.$$

La ecuación matricial se escribe $X(A - B) = 2I + (A + B)^T$. Como

$$D^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

multiplicamos por D^{-1} a la derecha:

$$X = (2I + S^T)D^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 15/8 & -9/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta r pasa por $Q = (1, 0, 0)$ y tiene vector director $\vec{d} = (0, -2, 1)$. El plano perpendicular a ella tiene ese vector como normal; al imponer que pase por $P = (2, 3, -1)$ resulta

$$-2(y - 3) + (z + 1) = 0 \implies \boxed{2y - z - 7 = 0}.$$

La proyección ortogonal H de P sobre r se obtiene con $H = Q + t\vec{d}$ y $(P - H) \cdot \vec{d} = 0$. Así,

$$t = \frac{(P - Q) \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} = -\frac{7}{5}, \quad H = \left(1, \frac{14}{5}, -\frac{7}{5}\right).$$

La distancia es

$$PH = \sqrt{1 + \frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \boxed{\frac{\sqrt{30}}{5}}.$$

Como H es el punto medio de PP' , el simétrico es

$$\boxed{P' = 2H - P = \left(0, \frac{13}{5}, -\frac{9}{5}\right)}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Si x es la base del rectángulo, su altura es $3 - x^2$, con $0 \leq x \leq \sqrt{3}$. El área que queremos maximizar es

$$A(x) = x(3 - x^2).$$

Buscamos los puntos críticos: $A'(x) = 3 - 3x^2 = 0$ da $x = 1$ dentro del dominio. Como $A''(1) = -6 < 0$, allí se alcanza el máximo; los extremos del intervalo tienen área nula. La altura correspondiente es $3 - 1 = 2$, así que

$$\boxed{\text{base} = 1, \quad \text{altura} = 2, \quad A_{\max} = 2}.$$

Opción B - Ejercicio 2

Integramos por partes, con $u = x$ y $dv = \cos x \, dx$. Entonces $du = dx$ y $v = \sin x$:

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Por tanto, el valor pedido es $\boxed{\frac{\pi}{2} - 1}$.

Opción B - Ejercicio 3

Una matriz es invertible si su determinante no es cero. En este caso,

$$\det(A - 2I) = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2).$$

Por tanto, $A - 2I$ tiene inversa si y solo si

$$\lambda \neq -1, 1, 2.$$

Para $\lambda = -2$, la ecuación $AX = 2X + I$ equivale a $(A - 2I)X = I$. Así, $X = (A - 2I)^{-1}$ y el cálculo de la inversa da

$$X = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -2/3 \\ 5/4 & -1/4 & 5/4 \\ -2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Convertimos primero π_1 a forma general. Sus vectores directores son $(1, -2, 0)$ y $(0, 1, -1)$; su producto vectorial es $(2, 1, 1)$, normal al plano. Con el punto $(-2, 0, 7)$:

$$\pi_1: 2x + y + z - 3 = 0.$$

La recta dada se expresa paramétricamente como

$$x = t, \quad y = t - 1, \quad z = 1 - 3t.$$

La distancia de un punto (x_0, y_0, z_0) a $ax + by + cz + d = 0$ es $|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Para un punto de r , las distancias a π_1 y π_2 son, respectivamente,

$$\frac{3}{\sqrt{6}}, \quad \frac{|6t + 3|}{\sqrt{6}}.$$

Al igualarlas, $|6t + 3| = 3$, así que $t = 0$ o $t = -1$. Los puntos pedidos son

$$(0, -1, 1) \quad \text{y} \quad (-1, -2, 4).$$