

Se optimiza el área de la hoja y se usa el cambio de variable indicado para la integral.

Opción A - Ejercicio 1

Sean $x, y > 0$ las dimensiones del rectángulo destinado al texto; la condición de área es $xy = 18$. Las dimensiones totales de la hoja serán $x + 2$ y $y + 4$, por los márgenes laterales de 1 cm y los superior e inferior de 2 cm. Sustituyendo $y = 18/x$, minimizamos

$$S(x) = (x + 2) \left(\frac{18}{x} + 4 \right) = 4x + 26 + \frac{36}{x}, \quad x > 0.$$

Los puntos críticos satisfacen $S'(x) = 4 - 36/x^2 = 0$, de donde $x = 3$ (la raíz negativa no pertenece al dominio). Además, $S''(x) = 72/x^3 > 0$, así que se trata de un mínimo. Entonces $y = 6$ y las dimensiones de la hoja son

$$\boxed{5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}}.$$

Opción A - Ejercicio 2

La integral es $I = \int_1^5 \frac{dx}{1 + \sqrt{e^{-x}}}$. Con el cambio propuesto $t^2 = e^{-x}$, se tiene $dx = -2 dt/t$ y los límites pasan de $e^{-1/2}$ a $e^{-5/2}$. Así,

$$I = 2 \int_{e^{-5/2}}^{e^{-1/2}} \frac{dt}{t(1+t)} = 2 [\ln t - \ln(1+t)]_{e^{-5/2}}^{e^{-1/2}}.$$

Por tanto,

$$\boxed{I = 4 + 2 \ln \left(\frac{1 + e^{-5/2}}{1 + e^{-1/2}} \right)}.$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_{\lambda} = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 2 & \lambda+2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{\lambda}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & \lambda+2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6-\lambda \end{array} \right).$$

Su determinante es $-\lambda(\lambda - 8)$. Si $\lambda \neq 0, 8$, Rouché–Frobenius da un sistema compatible determinado. Para $\lambda = 0$, ambas matrices tienen rango $2 < 3$ y la reducción da $x = z = t$, $y = 2 - t$: es compatible indeterminado. Para $\lambda = 8$,

$$A_8^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13/11 & 0 \\ 0 & 1 & 3/11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

por lo que $\text{rg}(A_8) = 2$ y $\text{rg}(A_8^*) = 3$; el sistema es incompatible. En resumen:

$$\lambda = 0 : \text{SCI}; \quad \lambda = 8 : \text{SI}; \quad \lambda \neq 0, 8 : \text{SCD}.$$

Para $\lambda = 0$, las soluciones son

$$(x, y, z) = (t, 2 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta r tiene vector director obtenido como producto vectorial de los normales $(1, -2, 0)$ y $(0, 2, 1)$:

$$\vec{d}_r = (-2, -1, 2).$$

La recta s tiene punto $P = (1, -2, 2)$ y vector director $\vec{d}_s = (-5, 3, 2)$. Un plano que contiene s y es paralelo a r tiene como normal el producto vectorial de estos directores:

$$\vec{n} = \vec{d}_s \times \vec{d}_r = (8, 6, 11).$$

Usando P , su ecuación general es

$$8x + 6y + 11z - 18 = 0.$$

Opción B - Ejercicio 1

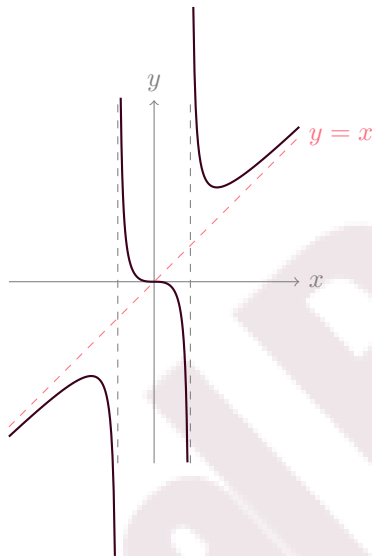
El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Al dividir,

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} = x + \frac{x}{x^2 - 1},$$

por lo que la asíntota oblicua en ambos infinitos es $y = x$; no hay horizontal. En $x = \pm 1$ los límites laterales son infinitos, de modo que son asíntotas verticales. El signo de la derivada determina el crecimiento:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Los puntos críticos son $x = 0, \pm\sqrt{3}$. La derivada es positiva para $|x| > \sqrt{3}$ y negativa para $|x| < \sqrt{3}$, teniendo en cuenta las discontinuidades en ± 1 . Así, crece en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, \infty)$, y decrece en $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \sqrt{3})$. Tiene máximo relativo en $(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/2)$ y mínimo relativo en $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/2)$.



Opción B - Ejercicio 2

En $x = e$, $f(e) = 1$ y $f'(e) = 1/e$, de modo que la normal tiene pendiente $-e$ y ecuación

$$y - 1 = -e(x - e) \implies y = -ex + 1 + e^2.$$

El logaritmo corta el eje x en $x = 1$; la normal corta ese eje en $x = e + 1/e$. En el primer tramo la curva queda sobre el eje y en el segundo la recta forma un triángulo de base $1/e$ y altura 1. El área es

$$A = \int_1^e \ln x \, dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 = [x \ln x - x]_1^e + \frac{1}{2e} = \boxed{1 + \frac{1}{2e}}.$$

Opción B - Ejercicio 3

Como A es cuadrada y $\det A = 4$, usamos las propiedades de determinantes:

$$\det(-3A^T) = (-3)^2 \det(A^T) = 9 \cdot 4 = \boxed{36}.$$

En la segunda matriz, el determinante es $-6bc + 6ad = 6(ad - bc) = 6 \det A$, luego vale $\boxed{24}$. Además,

$$\det(A^{-1}A^T) = \det(A^{-1}) \det(A^T) = \frac{1}{4} \cdot 4 = \boxed{1}.$$

Si $B^3 = I$, entonces $(\det B)^3 = 1$. Como el determinante es real, se sigue que

$$\boxed{\det B = 1}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Tres puntos están alineados exactamente cuando sus vectores diferencia son proporcionales. Aquí

$$\overrightarrow{AB} = (-\lambda - 2, 2 - \lambda, -\lambda), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 0, -1),$$

y

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\lambda - 2, \lambda - 2, 4 - 2\lambda).$$

Este vector se anula si y solo si $\lambda = 2$, así que sí existe tal valor: $\boxed{\lambda = 2}$. Para $\lambda = 1$, el producto vectorial es $(-1, -1, 2)$, normal al plano. Con $A = (2, 1, 1)$ obtenemos

$$-(x - 2) - (y - 1) + 2(z - 1) = 0 \implies \boxed{x + y - 2z - 1 = 0}.$$

La distancia del origen a un plano $ax + by + cz + d = 0$ es

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Para el origen y este plano resulta

$$\boxed{d = \frac{1}{\sqrt{6}}}.$$