

Modelo 1 de 2009

Soluciones desarrolladas · PAU Andalucía

Opción A · Ejercicio 1

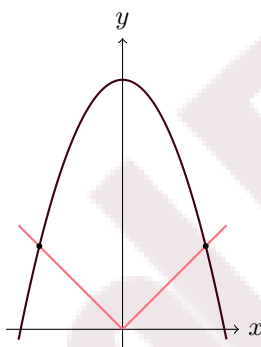
Al ser cúbica, $f''(x) = 6ax + 2b$. El punto de inflexión $(0, 1)$ da $b = 0$ y $d = 1$. El mínimo en $x = 1$ exige $f'(1) = 0$, luego $3a + c = 0$; la pendiente en $x = 2$ es $f'(2) = 1$, es decir, $12a + c = 1$. Resolviendo,

$$a = \frac{1}{9}, \quad b = 0, \quad c = -\frac{1}{3}, \quad d = 1.$$

Además, $f''(1) = 2/3 > 0$, como corresponde a un mínimo.

Opción A · Ejercicio 2

Los cortes cumplen $|x| = 6 - x^2$. Para $x < 0$, resulta $x = -2$; para $x \geq 0$, $x = 2$. El recinto queda entre ambos puntos y g está encima de f . Su esbozo es:



El área, separando en $x = 0$ por el valor absoluto, es

$$A = \int_{-2}^0 (6 - x^2 + x) dx + \int_0^2 (6 - x^2 - x) dx = \frac{44}{3}.$$

Opción A · Ejercicio 3

Sean a, b, c los precios unitarios. Las pistas corresponden a

$$a + 2b + c = 118, \quad na + (n + 3)b + 3c = 390.$$

a) Las ecuaciones serían incompatibles si sus filas de coeficientes fueran proporcionales pero no sus términos independientes. La segunda fila es múltiplo de la primera cuando $n = 3$; el factor es 3, pero $390 \neq 3 \cdot 118$. Para los demás valores las filas no son proporcionales y el sistema de dos ecuaciones es compatible. Por tanto, $n = 3$.

b) Si $n = 4$ y $c = 3a$, queda $4a + 2b = 118$ y $13a + 7b = 390$. Resolviendo, $a = 23$, $b = 13$, $c = 69$. Los precios son 23 €, 13 €, 69 €.

Opción A · Ejercicio 4

La recta es intersección de dos planos con normales $(1, 1, 0)$ y $(2, 1, 1)$; su vector director es su producto vectorial, proporcional a $d = (1, -1, -1)$. El plano perpendicular a la recta tiene ese vector como normal. Al pasar por $A = (1, -2, 1)$:

$$(x - 1) - (y + 2) - (z - 1) = 0 \implies x - y - z - 2 = 0.$$

Para la distancia, tomamos $R = (0, 2, 5)$ de la recta y usamos $d(A, r) = \frac{|(A - R) \times d|}{|d|}$. Como $A - R = (1, -4, -4)$ y $(A - R) \times d = (0, -3, 3)$,

$$d(A, r) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}.$$

Opción B · Ejercicio 1

Sean u la longitud del trozo destinado al cuadrado y $20 - u$ la del destinado al rectángulo, con $0 < u < 20$. El cuadrado tiene lado $u/4$. Si la altura del rectángulo es h y su base $2h$, su perímetro es $6h = 20 - u$. La suma de áreas es

$$S(u) = \left(\frac{u}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{20-u}{6}\right)^2 = \frac{u^2}{16} + \frac{(20-u)^2}{18}.$$

Derivando, $S'(u) = u/8 - (20-u)/9 = 0$ da $u = 160/17$. Además, $S'' = 17/72 > 0$, así que es un mínimo. El otro trozo mide $180/17$. Las dimensiones son: cuadrado de lado $40/17$ cm y rectángulo de base $60/17$ cm y altura $30/17$ cm.

Opción B · Ejercicio 2

a) Integramos por partes, con $u = x$ y $dv = \sin x \, dx$:

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

b) Los cortes de $f = -x^2 + 1$ y $g = x - 1$ satisfacen $x^2 + x - 2 = 0$, luego $x = -2, 1$. Entre ellos $f \geq g$, así que

$$A = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) \, dx = \left[\frac{9}{2} \right].$$

Opción B · Ejercicio 3

a) La primera ecuación da $x = 2 - z$; al sustituir en la segunda, $y = 2 - 3z$. La tercera queda satisfecha para todo z . Por tanto, el sistema es compatible indeterminado y

$$(x, y, z) = (2 - t, 2 - 3t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Toda solución común debe pertenecer a esa familia. La primera ecuación del segundo sistema da $4 - 3t = 1$, luego $t = 1$ y $(x, y, z) = (1, -1, 1)$. La última ecuación impone $1 - 2 + \lambda = -3$, de donde $\lambda = -2$.

Opción B · Ejercicio 4

La recta buscada debe pasar por $A = (1, 1, -1)$ y por un punto del eje Z , que escribimos $Q = (0, 0, t)$. Un vector director es $Q - A = (-1, -1, t + 1)$. Para que la recta sea paralela al plano, este vector debe ser perpendicular al normal $(1, -1, 1)$:

$$(-1, -1, t + 1) \cdot (1, -1, 1) = t + 1 = 0 \implies Q = (0, 0, -1).$$

Por tanto, una forma paramétrica de la recta es $(x, y, z) = (1, 1, -1) + s(1, 1, 0)$.