

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Julio de 2022 · Convocatoria extraordinaria

Se resuelven los seis problemas para ofrecer una propuesta completa.

Problema 1 · Operaciones con matrices

Del enunciado leemos

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

a.1) Para sumar matrices deben tener las mismas dimensiones. Como CA es 1×2 y B es 2×1 , la suma $B + 2CA$ no está definida.

a.2) El producto BC sí existe y es una matriz 2×2 :

$$BC = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -12 & -12 \end{pmatrix}, \quad (BC)^T = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Como $(BC)^T$ y A son ambas 2×2 , se pueden restar:

$$A - (BC)^T = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}.$$

a.3) Las dimensiones permiten calcular $CAB = (1 \times 2)(2 \times 2)(2 \times 1)$, que es un escalar:

$$CA = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -8 \end{pmatrix}, \quad CAB = \begin{pmatrix} -16 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = 16.$$

b) La ecuación es $\frac{1}{5}(B + 4AX) = C^T$. Multiplicando por 5 y despejando primero AX :

$$B + 4AX = 5C^T \implies AX = \frac{5C^T - B}{4} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Como $\det A = 24 \neq 0$, A tiene inversa. Con

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{7}{8} \end{pmatrix}.$$

$$B + 2CA \text{ no existe; } A - (BC)^T = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}; \quad CAB = 16; \quad X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{7}{8} \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Mezclas de café e ingresos

Sean x los kilos de mezcla a partes iguales y y los kilos de mezcla que lleva una parte de café colombiano por tres de brasileño. Para no superar las existencias de café colombiano y brasileño:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} \leq 100, \quad \frac{x}{2} + \frac{3y}{4} \leq 210, \quad x, y \geq 0.$$

Multiplicamos por 4 para simplificar las restricciones. El ingreso que queremos maximizar es

$$2x + y \leq 400, \quad 2x + 3y \leq 840, \quad I(x, y) = 15x + 10y.$$

El máximo de una función lineal sobre esta región se encuentra en un vértice. Las dos rectas se cortan en

$$\begin{cases} 2x + y = 400, \\ 2x + 3y = 840 \end{cases} \implies y = 220, \quad x = 90.$$

Los vértices factibles son $(0, 0)$, $(200, 0)$, $(90, 220)$ y $(0, 280)$. Evaluamos el ingreso:

$$I(0, 0) = 0, \quad I(200, 0) = 3000, \quad I(90, 220) = 3550, \quad I(0, 280) = 2800.$$

$$\text{Preparar 90 kg de la primera mezcla y 220 kg de la segunda; } I_{\max} = 3550 \text{ €}.$$

Problema 3 · Estudio de una función racional

La función es

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1}.$$

a) El denominador se anula en $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, por lo que

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}.$$

El numerador factoriza como $(3x+2)(x-2)$, de modo que los cortes con X son $(-\frac{2}{3}, 0)$ y $(2, 0)$. Además, $f(0) = 4$, así que corta al eje Y en $(0, 4)$.

b) En r_1 y r_2 el numerador no se anula y el denominador sí; por ello son asíntotas verticales. Como los grados coinciden, la asíntota horizontal es el cociente de los coeficientes principales, $y = 3$.

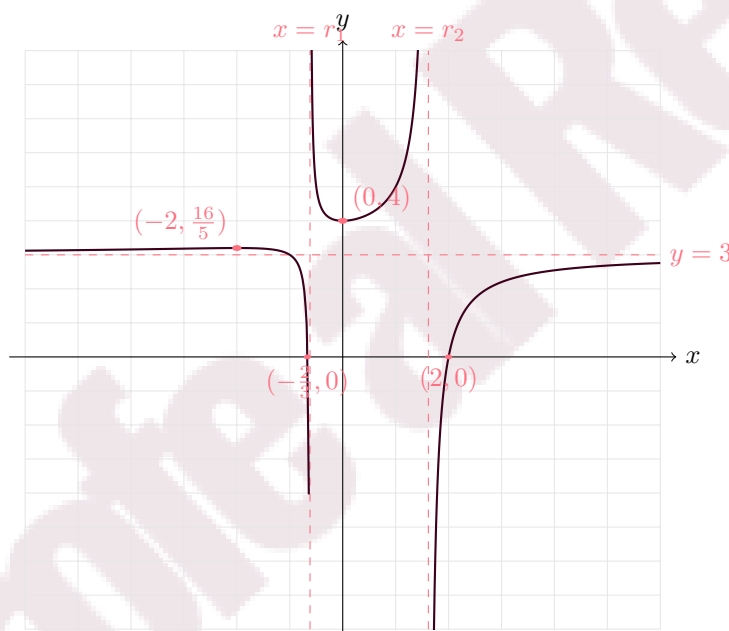
c) y d) Derivamos para estudiar dónde crece y decrece:

$$f'(x) = \frac{(6x-4)(x^2-x-1) - (3x^2-4x-4)(2x-1)}{(x^2-x-1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x^2-x-1)^2}.$$

El denominador es positivo en el dominio. Separamos la recta en los ceros de la derivada $-2, 0$ y los puntos excluidos r_1, r_2 . El signo de f' es positivo en $(-\infty, -2)$, negativo en $(-2, r_1)$ y $(r_1, 0)$, y positivo en $(0, r_2)$ y $(r_2, +\infty)$. Por tanto, hay un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 0$:

$$f(-2) = \frac{16}{5}, \quad f(0) = 4.$$

e) La gráfica reúne los puntos de corte, las asíntotas y los extremos:



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}; \quad y = 3; \quad \max_{\text{loc}} f = (-2, \frac{16}{5}), \quad \min_{\text{loc}} f = (0, 4).$$

Problema 4 · Rendimiento de una máquina

El rendimiento, para $0 \leq x \leq 12$ meses, es

$$f(x) = \frac{1}{10}(800 + 15x + 6x^2 - x^3).$$

a) Comparamos los valores en $x = 1$ y $x = 2$:

$$f(1) = 82\%, \quad f(2) = 84,6\%.$$

El rendimiento del primer mes es inferior al del segundo.

b) Para localizar el máximo en el intervalo derivamos:

$$f'(x) = \frac{1}{10}(15 + 12x - 3x^2) = -\frac{3}{10}(x-5)(x+1).$$

En $0 \leq x < 5$ la derivada es positiva y en $5 < x \leq 12$ es negativa. Por ello, el máximo se alcanza a los cinco meses:

$$f(5) = \frac{900}{10} = 90\%.$$

c) La función crece hasta $x = 5$ y decrece después; su mínimo en $[0, 12]$ debe estar en uno de los extremos. Calculamos

$$f(0) = 80\%, \quad f(12) = \frac{116}{10} = 11,6\%.$$

Como ambos son mayores que 10%, no hay ningún mes del año en que el rendimiento sea inferior al 10%.

$$f(1) = 82\% < f(2) = 84,6\%; \quad f_{\max} = 90\% \text{ a los 5 meses}; \quad f(x) \geq 11,6\% \text{ en } [0, 12].$$

Problema 5 · Sucesos y probabilidad condicionada

Los datos son $P(B) = 0,4$, $P(A^c \cap B^c) = 0,2$ y $P(A \cap B) = 0,3$.

a) Por De Morgan, $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$. Luego

$$P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

b) «Solo uno» es la parte de $A \cup B$ que queda al quitar la intersección:

$$P(\text{solo uno}) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,3 = 0,5.$$

c) Primero hallamos $P(A)$ mediante la fórmula de la unión:

$$0,8 = P(A) + 0,4 - 0,3 \implies P(A) = 0,7.$$

Entonces

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}.$$

d) Para que sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Pero $0,7(0,4) = 0,28 \neq 0,3$, así que no lo son.

$$P(A \cup B) = 0,8; \quad P(\text{solo uno}) = 0,5; \quad P(B | A) = \frac{3}{7}; \quad A, B \text{ no son independientes.}$$

Problema 6 · Calificación de auditorías

Sean C el suceso «auditor correcto» y I el suceso «auditor que siempre da Aceptable». Entonces $P(C) = 0,9$, $P(I) = 0,1$. Las calificaciones merecidas tienen probabilidades 0,3 (Excelente), 0,5 (Aceptable) y 0,2 (Deficiente).

a) Un resultado Deficiente solo se produce si el auditor es correcto y la empresa merece esa calificación:

$$P(\text{Deficiente}) = 0,9(0,2) = 0,18.$$

b) Todo auditor correcto acierta. Un auditor del tipo I acierta cuando la calificación merecida ya es Aceptable:

$$P(\text{acierto}) = 0,9 + 0,1(0,5) = 0,95.$$

c) Para invertir la condición, aplicamos Bayes. El numerador es la probabilidad de auditor correcto y calificación merecida Aceptable; la probabilidad total de que se emita Aceptable incluye también a los auditores del tipo I :

$$P(C | \text{Aceptable}) = \frac{0,9(0,5)}{0,9(0,5) + 0,1} = \frac{9}{11}.$$

$$P(\text{Deficiente}) = 0,18; \quad P(\text{acierto}) = 0,95; \quad P(C | \text{Aceptable}) = \frac{9}{11}.$$