

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Opción A

Ejercicio 1 · Operaciones con matrices

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Trasponemos primero B y multiplicamos las matrices:

$$B^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad AB^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$AB^t = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}.$$

b) Despejamos X de $A + 2X = B$:

$$X = \frac{B - A}{2} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Como $\det B = 14 \neq 0$, podemos despejar Y multiplicando por B^{-1} :

$$B^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Y = B^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 42 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$Y = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 · Optimización de una función cuadrática

La cantidad invertida x está restringida a $[1, 500]$ y tanto x como $R(x)$ se miden en miles de euros. La función es polinómica, por lo que está definida para todo real; para este problema solo consideramos el intervalo indicado:

$$R(x) = -0,001x^2 + 0,5x + 2,5, \quad 1 \leq x \leq 500.$$

Como el coeficiente de x^2 es negativo, la parábola abre hacia abajo y su máximo está en el vértice. Para $ax^2 + bx + c$, la abscisa del vértice es $x_v = -b/(2a)$; por tanto,

$$x_v = -\frac{0,5}{2(-0,001)} = 250.$$

Este valor pertenece al intervalo de inversión. La rentabilidad máxima es

$$R(250) = -0,001 \cdot 250^2 + 0,5 \cdot 250 + 2,5 = -62,5 + 125 + 2,5 = 65.$$

Así, hay que invertir 250 000 euros para obtener 65 000 euros de rentabilidad.

La parábola es cóncava hacia abajo, de modo que su mínimo en el intervalo cerrado se alcanza en uno de los extremos. Comparamos:

$$R(1) = -0,001 + 0,5 + 2,5 = 2,999, \quad R(500) = -250 + 250 + 2,5 = 2,5.$$

La menor rentabilidad se obtiene invirtiendo 500 000 euros, con un retorno de 2 500 euros.

Máximo: invertir 250 000 € y obtener 65 000 €; mínimo: invertir 500 000 €.

Ejercicio 3 · Probabilidad condicionada en dos extracciones

Hay cuatro ases y dos reyes. Sea A_1 el suceso «la primera carta es un as» y A_2 el suceso «la segunda carta es un as».

a) La primera carta se devuelve a la baraja, por lo que la composición vuelve a ser la misma antes de extraer la segunda. Las extracciones son independientes y

$$P(A_1 | A_2) = P(A_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

b) Ahora la primera carta no se devuelve. Aplicamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}.$$

Por simetría, $P(A_2) = 4/6$. Para que ambas cartas sean ases, la primera debe ser un as y, tras retirarla, quedan tres ases entre cinco cartas:

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5}.$$

Sustituimos en la probabilidad condicionada:

$$P(A_1 | A_2) = \frac{(4/6)(3/5)}{4/6} = \frac{3}{5}.$$

$P(A_1 A_2) = \frac{2}{3}$ con devolución; $P(A_1 A_2) = \frac{3}{5}$ sin devolución.

Ejercicio 4 · Contraste unilateral para la media

La desviación típica poblacional es conocida, $\sigma = 6$ cm, y se sospecha que la media ha aumentado respecto a 170 cm. Definimos μ como la talla media poblacional y planteamos un contraste de cola derecha:

$$H_0 : \mu \leq 170, \quad H_1 : \mu > 170.$$

Con $n = 64$ y $\bar{x} = 172$, bajo el valor frontera $\mu_0 = 170$, el estadístico normalizado es

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{172 - 170}{6/\sqrt{64}} = \frac{2}{0,75} \approx 2,667.$$

Para $\alpha = 0,01$, el valor crítico de cola derecha es $z_{0,99} \approx 2,326$; la región crítica es $Z > 2,326$. Como $2,667 > 2,326$, rechazamos H_0 al 1%. La muestra aporta evidencia suficiente para concluir que la talla media ha aumentado.

Región crítica: $Z > 2,326$; se concluye que $\mu > 170$ cm al 1%.
--

Opción B

Ejercicio 1 · Programación lineal

Las condiciones $x, y \geq 0$ restringen las cantidades al primer cuadrante. Despejamos y en las otras tres desigualdades:

$$\begin{aligned} 4x + 2y \geq 5 &\iff y \geq \frac{5}{2} - 2x, & 2x + 5y \leq 10 &\iff y \leq 2 - \frac{2}{5}x, \\ 2x + 2y \leq 6 &\iff y \leq 3 - x. \end{aligned}$$

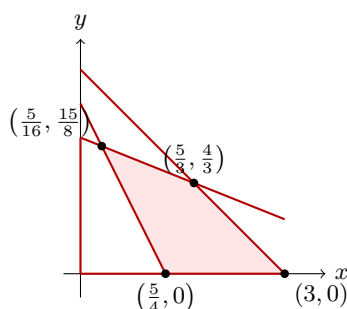
La región queda por encima de $y = 5/2 - 2x$, por debajo de las otras dos rectas y en el primer cuadrante. Sus vértices se obtienen de las intersecciones que cumplen todas las restricciones:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 5, \\ 2x + 5y = 10 \end{cases} \implies (x, y) = \left(\frac{5}{16}, \frac{15}{8} \right), \quad \begin{cases} 2x + 5y = 10, \\ x + y = 3 \end{cases} \implies (x, y) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3} \right),$$

$$(x + y = 3, y = 0) \implies (3, 0), \quad (4x + 2y = 5, y = 0) \implies \left(\frac{5}{4}, 0 \right).$$

La intersección de $4x + 2y = 5$ con $2x + 5y = 10$ forma el vértice izquierdo. Hacia la derecha, la cota superior cambia en el cruce de las dos rectas superiores, y la cota inferior llega al eje X en $(5/4, 0)$. El punto $(0, 3)$ no

es factible porque incumple $2x + 5y \leq 10$. La figura recoge el recinto:



Evaluamos $F(x, y) = x + 2y$ en los cuatro vértices:

(x, y)	$(5/16, 15/8)$	$(5/3, 4/3)$	$(3, 0)$	$(5/4, 0)$
$F(x, y)$	$65/16$	$13/3$	3	$5/4$

Por tanto, el mínimo es $5/4$, en $(5/4, 0)$, y el máximo es $13/3$, en $(5/3, 4/3)$.

$$F_{\min} = \frac{5}{4} \text{ en } \left(\frac{5}{4}, 0\right); \quad F_{\max} = \frac{13}{3} \text{ en } \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Ejercicio 2 · Derivabilidad de una función a trozos

La unión de los intervalos de las dos ramas es $\mathbb{R}$, así que ese es el dominio. Para que la función sea derivable en $x = -1$, primero imponemos continuidad y después la igualdad de las derivadas laterales:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(ax - 12), & x < -1, \\ -x^2 + b(x - 1), & x \geq -1. \end{cases}$$

La continuidad en $x = -1$ exige

$$\frac{1}{2}(-a - 12) = -1 - 2b \implies a = 4b - 10.$$

Las derivadas de las ramas son $a/2$ y $-2x + b$. Al igualarlas en -1 ,

$$\frac{a}{2} = 2 + b \implies a = 2b + 4.$$

Igualando las dos expresiones de a , $4b - 10 = 2b + 4$, de donde $b = 7$ y $a = 18$.

$$a = 18, \quad b = 7.$$

Para $a = 18$ y $b = 7$, el punto $x = -2$ pertenece a la primera rama. Allí

$$f(-2) = \frac{1}{2}(-2 - 12) = -7, \quad f'(-2) = \frac{1}{2}.$$

La tangente pasa por $(-2, -7)$ con pendiente $1/2$:

$$y + 7 = \frac{1}{2}(x + 2) \implies y = \frac{1}{2}x - 6.$$

$$\text{La recta tangente es } y = \frac{1}{2}x - 6.$$

Ejercicio 3 · Probabilidad de la unión

Sean A y B los sucesos «lee el diario A» y «lee el diario B». Se conocen $P(A) = 0,30$, $P(B) = 0,13$ y $P(A \cap B) = 0,06$.

a) La probabilidad de que no lea ninguno es el complementario de $A \cup B$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,30 + 0,13 - 0,06 = 0,37,$$

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,37 = 0,63.$$

b) Entre quienes no leen B, la probabilidad de que lean A es

$$P(A | B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,30 - 0,06}{1 - 0,13} = \frac{0,24}{0,87} = \frac{8}{29} \approx 0,276.$$

$$P(\text{no lee ninguno}) = 0,63; \quad P(A | B^c) = \frac{8}{29} \approx 0,276.$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para una media

Como la población es normal y conocemos $\sigma = 0,5$ horas, el intervalo de confianza para la media es

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

La media de los diez tiempos observados es

$$\bar{x} = \frac{3,5 + 4,25 + 2,25 + 3,75 + 4,2 + 2,75 + 1,25 + 1,2 + 1,75 + 2,1}{10} = \frac{27}{10} = 2,7 \text{ h.}$$

Para una confianza del 90%, $z_{0,95} \approx 1,645$. El error es

$$E = 1,645 \frac{0,5}{\sqrt{10}} \approx 0,2601 \text{ h,}$$

de modo que

$$IC_{90\%} = [2,7 - 0,2601, 2,7 + 0,2601] \approx [2,4399, 2,9601] \text{ h.}$$

Para que el error máximo no supere 0,1 horas, despejamos el tamaño muestral:

$$n \geq \left(\frac{z_{0,95}\sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{1,645 \cdot 0,5}{0,1} \right)^2 = 67,650625.$$

Redondeamos al entero superior, pues con un tamaño menor el error podría superar el límite.

$$IC_{90\%} \approx [2,4399, 2,9601] \text{ h; } n_{\min} = 68.$$