

Problema 1. Una tienda de televisores ha obtenido 247250 euros por la venta de 220 televisores de sus modelos *ULED*, *QLED* y *LD*. Un televisor del modelo *ULED* cuesta 1250 euros y los otros dos modelos son un 10% y un 20% más baratos que el modelo *ULED*, respectivamente. Sabemos que la suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos. Halla el número de televisores de cada modelo que se han vendido.

(Planteamiento correcto, 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Solución:

Llamando: x = número de televisores *ULED* vendidos

y = número de televisores *QLED* vendidos

z = número de televisores *LD* vendidos

Calculemos el precio de cada tipo de televisor. P_x precio del televisor *ULED*, P_y del *QLED* y P_z del *LD*.

Del enunciado del problema obtenemos:

“un televisor del modelo *ULED* cuesta 1250 euros” $\rightarrow P_x = 1250$

“los otros dos modelos son un 10% y un 20% más baratos que el modelo *ULED*, respectivamente”

$\rightarrow P_y = 0.90 \cdot 1250 = 1125$ y $P_z = 0.80 \cdot 1250 = 1000$

Las ecuaciones para resolver el problema las obtenemos a partir de:

“la suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos” $\rightarrow y + z = 3x \rightarrow 3x - y - z = 0$

“ha obtenido 247250 euros por la venta de 220 televisores de sus modelos *ULED*, *QLED* y *LD*” $\rightarrow$

$1250x + 1125y + 1000z = 247250$ e $x + y + z = 220$

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y + z = 220 \\ 3x - y - z = 0 \\ 1250x + 1125y + 1000z = 247250 \end{cases}$$

Lo resolveremos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1250 & 1125 & 1000 & 247250 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - 1000 \cdot F_1]{F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 4 & 0 & 0 & 220 \\ 250 & 125 & 0 & 27250 \end{array} \right)$$

$$\text{De } F_2 \rightarrow 4x = 220 \rightarrow x = \frac{220}{4} = 55$$

$$\begin{aligned} \text{De } F_3 \rightarrow 250x + 125y &= 27250 \rightarrow 250 \cdot 55 + 125y = 27250 \rightarrow 13750 + 125y = 27250 \rightarrow \\ 125y &= 27250 - 13750 \rightarrow 125y = 13500 \rightarrow y = \frac{13500}{125} = 108 \end{aligned}$$

$$\text{De } F_1 \rightarrow x + y + z = 220 \rightarrow 55 + 108 + z = 220 \rightarrow z = 220 - 55 - 108 \rightarrow z = 57$$

Solución: se han vendido 55 tv *ULED*, 108 *QLED* y 57 *LD*.

Problema 2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A + A = B$. (4 puntos)
- Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A - B)Y - AY = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3 (4 puntos)
- Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA^{-1} = I$. (2 puntos)

Solución:

a) ¿Matriz X ? / $X^{-1}A + A = B$.

$$X^{-1}A + A = B \rightarrow X^{-1}A = B - A; \text{ multiplicando por la izquierda por } X: X X^{-1}A = X(B - A)$$

$$\{ \text{como } X X^{-1} = I \} \rightarrow IA = X(B - A) \rightarrow A = X(B - A)$$

$$\text{Si existe } (B - A)^{-1} \rightarrow \text{multiplicando por la derecha por } (B - A)^{-1}: A(B - A)^{-1} = X(B - A)(B - A)^{-1}$$

$$\{ \text{como } (B - A)(B - A)^{-1} = I \} \rightarrow A(B - A)^{-1} = X$$

Cálculos:

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad |B - A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \exists (B - A)^{-1}$$

Cálculo de la inversa de $(B - A)$,

$$B - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (B - A)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$X = A(B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) ¿Matriz Y ? / $(A - B)Y - AY = I$

Despejemos Y ,

$AY - BY - AY = I$; $-BY = I$; $BY = -I$; si existe B^{-1} entonces, multiplicando por B^{-1} la izquierda
 $B^{-1}BY = B^{-1}(-I)$; $IY = -B^{-1}I$; $Y = -B^{-1}I$

Como $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \rightarrow \exists B^{-1}$

Cálculo de B^{-1} ,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente: $Y = -B^{-1}I = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Solución: $Y = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) ¿Matriz Z ? / $AZA^{-1} = I$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$

Despejemos Z , multiplicando por A^{-1} por la izquierda: $A^{-1}AZA^{-1} = A^{-1}I$; $IZA^{-1} = A^{-1}$; $ZA^{-1} = A^{-1}$;
 multiplicando por A por la derecha: $ZA^{-1}A = A^{-1}A$; $ZI = I$; $Z = I$

Solución: $Z = I$

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x(x-3) + (x+1)}$. Se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Solución:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x(x-3) + (x+1)} = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 3x + x + 1} = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1}$$

a) Dominio,

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 3 \cdot 0}{0^2 - 2 \cdot 0 + 1} = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = 0; \quad x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x-3)=0 \begin{cases} x=0 \rightarrow (0, 0) \\ x-3=0; \quad x=3 \rightarrow (3, 0) \end{cases}$$

Dom $f(x) = \mathbb{R} \sim \{1\}$ y los puntos de corte con los ejes coordenados son: $(0, 0)$ y $(3, 0)$.

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{aligned}, \quad \text{la asíntota horizontal es } y=1.$$

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que la posible a.v. es $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1-3}{1-2+1} = \frac{-2}{0} = \infty \rightarrow x=1 \text{ es a.v.}$$

La asíntota horizontal es $y=1$ y la asíntota vertical $x=1$.

c) Monotonía.

Estudiamos el signo de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(2x-3) \cdot (x^2-2x+1) - (x^2-3x) \cdot (2x-2)}{(x^2-2x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x^2-2x+1)^2}$$

$$\begin{array}{r} \frac{x^2-2x+1}{2x-3} \quad \frac{x^2-3x}{2x-2} \quad \frac{2x^3-7x^2+8x-3}{-2x^3+8x^2-6x} \\ \frac{-3x^2+6x-3}{2x^3-4x^2+2x} \quad \frac{2x^3-6x^2}{2x^3-8x^2+6x} \end{array}$$

Obtenemos las raíces del numerador y denominador,

$$x^2+2x-3=0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} =$$

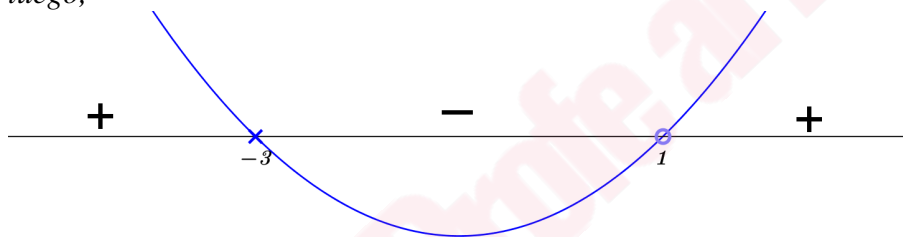
$$= \begin{cases} x_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

$$(x^2-2x+1)^2=0 \rightarrow x^2-2x+1=0 \rightarrow \{\text{resuelta en a)}\} \quad x=1$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: $(\{1\} \notin \text{Dom } f(x))$



El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces -3 y 1 , luego,



Por tanto,

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ y

$f(x)$ es decreciente en $(-3, 1)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = -3$ hay un máximo local.

$$x = -3 \quad f(1) = \frac{(-3)^2 - 3 \cdot (-3)}{(-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 1} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8} \rightarrow \text{Máximo local } \left(-3, \frac{9}{8}\right)$$

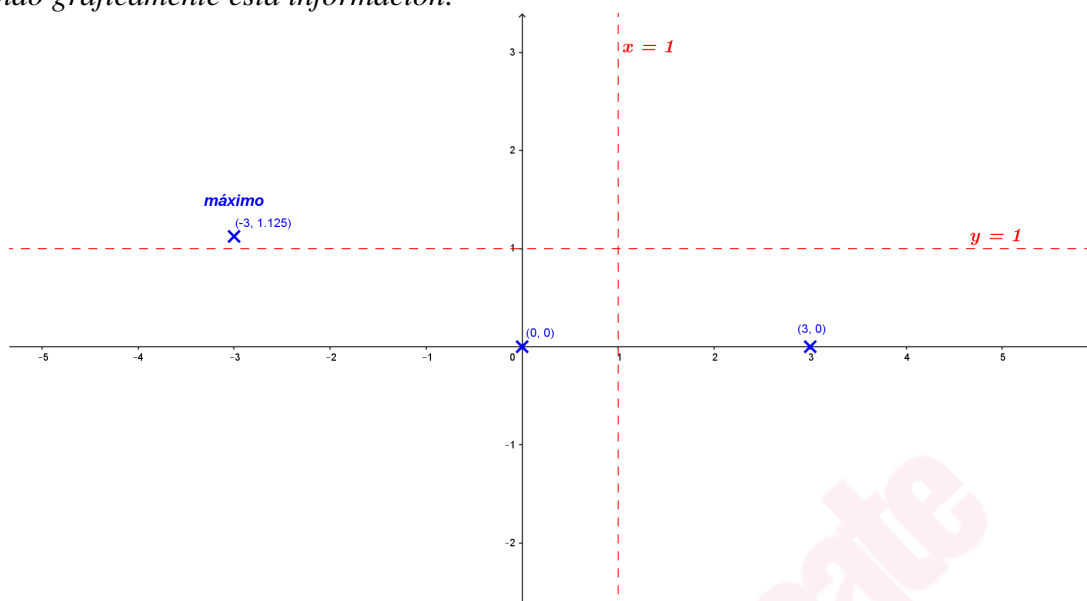
Solución: $f(x)$ sólo tiene un máximo local en $\left(-3, \frac{9}{8}\right)$

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $(0, 0)$ y $(3, 0)$, máximo local en $\left(-3, \frac{9}{8}\right)$; a.h. $y = 1$, a.v. $x = 1$.

Representando gráficamente esta información:



Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener la posición de la curva respecto de su asíntota horizontal.

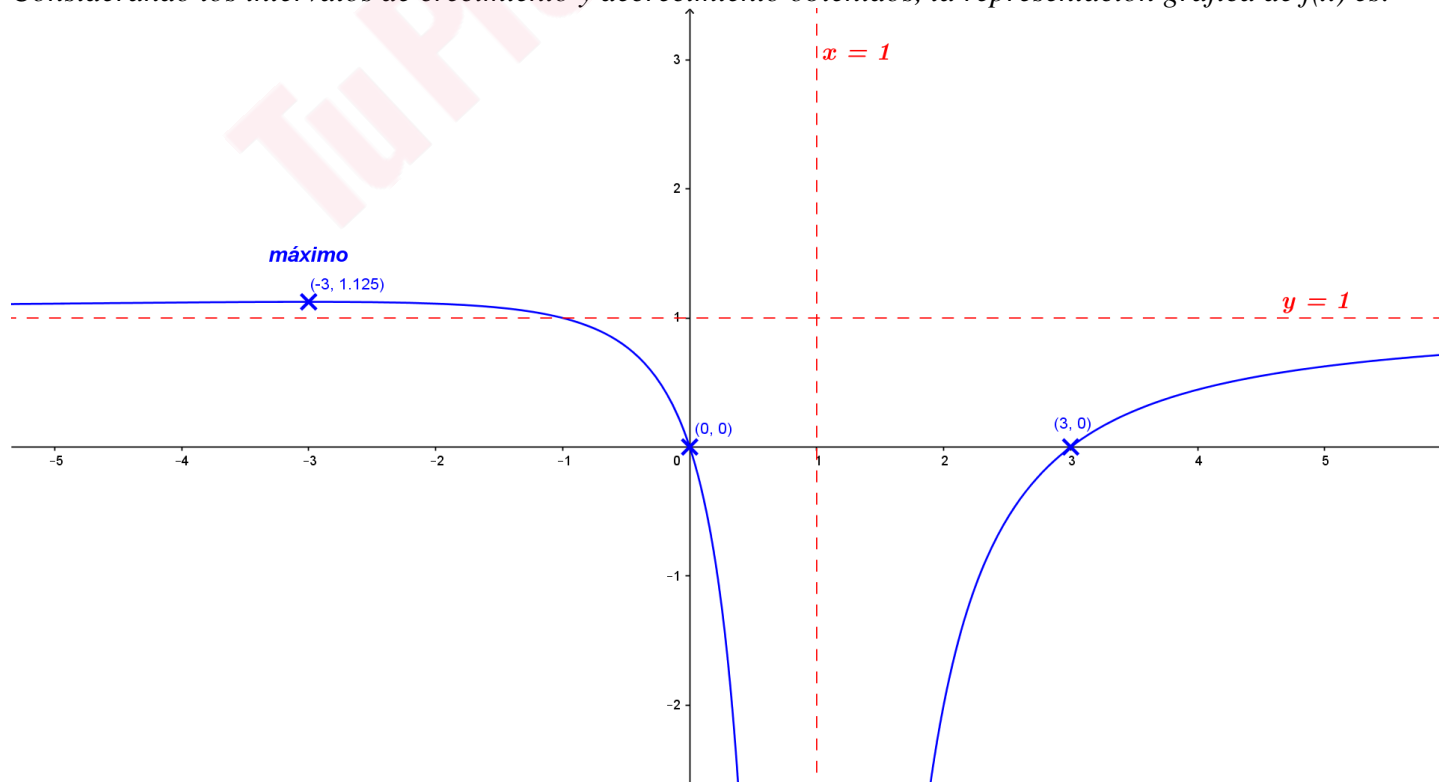
A.H. $y = 1$

$$\text{En } -\infty, \quad x = -1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{(-1000)^2 - 3 \cdot (-1000)}{(-1000)^2 - 2 \cdot (-1000) + 1} = 1'0009... > 1$$

$$\text{En } +\infty, \quad x = 1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1000^2 - 3 \cdot 1000}{1000^2 - 2 \cdot 1000 + 1} = 0'998... < 1$$



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de $f(x)$ es:



Problema 4. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + a x^2 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

- Determina el valor de a para que esta función sea continua. (2 puntos)
- Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimo locales que tiene esta función en el intervalo $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. (4 puntos)
- Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX . (2 puntos)

Solución:

a) ¿Valor de a para que $f(x)$ sea continua?

Para $x < -1$ $f(x) = x^3 + a x^2 + 24x$ es, independientemente del valor de a , un polinomio luego es continua.

Para $x > -1$ $f(x) = (x-1)^2 + 3$ es un polinomio luego es continua.

El problema para continuidad está en el cambio de definición, es decir, en $x = -1$.

Continuidad en $x = -1$,

$$a) f(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + 24(-1) = -1 + a - 24 = a - 25$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^3 + a x^2 + 24x) = (-1)^3 + a(-1)^2 + 24(-1) = a - 25$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [(x-1)^2 + 3] = (-1-1)^2 + 3 = 7$$

$$\text{Para que exista el límite } a - 25 = 7 \rightarrow a = 7 + 25 = 32$$

$$c) \text{ Para } 32 = 2 \quad f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

Solución: para que $f(x)$ sea continua debe ser $a = 32$.

b) Para $a = 9$, máximos y mínimos locales de $f(x)$ en $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right) = (-4.5, -1.5)$.

$$\text{Como } (-4.5, -1.5) \subset \{x \leq -1\} \rightarrow f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 24$$

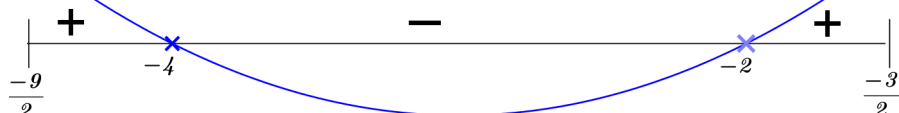
estudiemos el signo de $f'(x)$

$$3x^2 + 18x + 24 = 0 \rightarrow x = \frac{-18 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24}}{2 \cdot 3} = \frac{-18 \pm 6}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{-18+6}{6} = -2 \\ x_2 = \frac{-18-6}{6} = -4 \end{cases}$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en:



$f'(x)$ es, gráficamente, un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces -4 y -2 , luego,



En $x = -4$ hay un máximo local
y
en $x = -2$ hay un mínimo local

Para $x = -4 \rightarrow f(-4) = (-4)^3 + 9(-4)^2 + 24(-4) = -16$

Para $x = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^3 + 9(-2)^2 + 24(-2) = -20$

Solución: para $a = 9$ los máximos y mínimos locales de $f(x)$ en $\left(\frac{-9}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ son:

$(-4, -16)$ máximo local y $(-2, -20)$ mínimo local.

c) Si $a = 0$ ¿área de la región delimitada por $f(x)$, $x=2$, $x=3$ y eje OX ?

$$\text{Si } a = 0 \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Entre $x = 2$ y $x = 3$ $f(x) = (x-1)^2 + 3$ y, además, como $f(x)$ es algo al cuadrado más tres: $f(x) > 0$. Por tanto el área pedida la obtenemos mediante el siguiente cálculo:

$$A = \int_2^3 [(x-1)^2 + 3] dx$$

$$\text{Cálculo auxiliar: } \int (x-1)^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{cambio de variable} \\ t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right\} \int t^2 dx = \frac{t^3}{3} = \frac{(x-1)^3}{3}$$

$$A = \int_2^3 [(x-1)^2 + 3] dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + 3x \right]_2^3 = \left(\frac{(3-1)^3}{3} + 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{(2-1)^3}{3} + 3 \cdot 2 \right) = \frac{8}{3} + 9 - \left(\frac{1}{3} + 6 \right) = \frac{16}{3}$$

Por tanto, el área de la región pedida es $\frac{16}{3}$ u.a.

Problema 5. Un 30 % de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán. En dicha empresa, el 40 % de los directivos sabe inglés. Además, de los directivos que saben alemán, el 40 % sabe también inglés. Seleccionamos un directivo al azar.

- ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? (4 puntos)
- ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés? (3 puntos)
- Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés? (3 puntos)

Solución:

Utilizando los sucesos: I = el directivo sabe inglés y A = el directivo sabe alemán

(Denotamos por I^c y A^c , respectivamente, el suceso complementario de I y el suceso complementario de A).

Los datos del problema son:

“Un 30 % de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán” $\rightarrow P(I \cap A) = 0.30$,

“el 40 % de los directivos sabe inglés” $\rightarrow P(I) = 0.40$ y

“Además, de los directivos que saben alemán, el 40 % sabe también inglés” $\rightarrow P(I/A) = 0.40$.

- a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? Debemos obtener $P(A)$.

$$P(I/A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} \rightarrow 0.40 = \frac{0.30}{P(A)} \rightarrow P(A) = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

Solución: $P(A) = 0.75$.

- b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés? Debemos obtener $P(A \cap I^c)$

$A = \{I \cup I^c = U \text{ suceso seguro}\} \cap (I \cup I^c) = (A \cap I) \cup (A \cap I^c)$, luego

$$P(A) = P[(A \cap I) \cup (A \cap I^c)] = P(A \cap I) + P(A \cap I^c) - P(A \cap I \cap A \cap I^c) =$$

$$A \cap I \cap A \cap I^c = A \cap I \cap I^c = \{\text{Como } I \cap I^c = \emptyset\} = A \cap \emptyset = \emptyset \quad \{\text{suceso imposible}\}$$

$$= P(A \cap I) + P(A \cap I^c) - P(\emptyset) = P(A \cap I) + P(A \cap I^c) - 0 = P(A \cap I) + P(A \cap I^c)$$

Hemos obtenido: $P(A) = P(A \cap I) + P(A \cap I^c)$

Sustituyendo las probabilidades conocidas:

$$\rightarrow 0.75 = 0.3 + P(A \cap I^c) \rightarrow P(A \cap I^c) = 0.75 - 0.3 = 0.45$$

Solución: la probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés es 0.45.

- c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés? Debemos obtener $P(I/A^c)$

$$P(I/A^c) = \frac{P(I \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(I \cap A^c)}{1 - P(A)} = \frac{P(I \cap A^c)}{1 - 0.75} = \frac{P(I \cap A^c)}{0.25} =$$

Calculemos $P(I \cap A^c)$ de forma similar al cálculo realizado en el apartado anterior.

$I = \{A \cup A^c = U \text{ suceso seguro}\} \cap (A \cup A^c) = (I \cap A) \cup (I \cap A^c)$, luego

$$P(I) = P[(I \cap A) \cup (I \cap A^c)] = P(I \cap A) + P(I \cap A^c) - P(I \cap A \cap I \cap A^c) =$$

$$A \cap I \cap A \cap I^c = A \cap I \cap I^c = \{\text{Como } I \cap I^c = \emptyset\} = A \cap \emptyset = \emptyset \quad \{\text{suceso imposible}\}$$

$$\text{Entonces } P(I) = P(I \cap A) + P(I \cap A^c) - P(\emptyset) = P(I \cap A) + P(I \cap A^c) - 0 = P(I \cap A) + P(I \cap A^c)$$

$$\text{Hemos obtenido: } P(I) = P(I \cap A) + P(I \cap A^c) \rightarrow 0.4 = 0.3 + P(I \cap A^c) \rightarrow P(I \cap A^c) = 0.4 - 0.3 = 0.1$$

$$\text{Finalmente, } P\left(\frac{I}{A^c}\right) = \frac{P(I \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4$$

Solución: la probabilidad hay de que si el directivo no sabe alemán sepa inglés es 0.40.

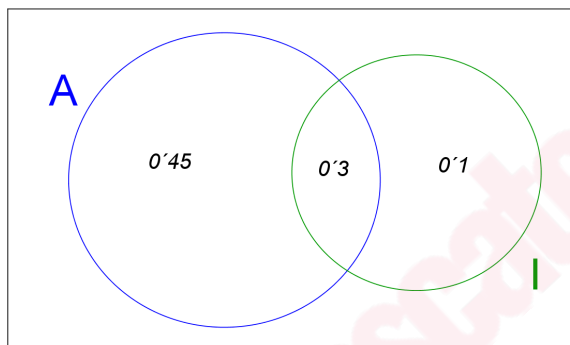
* * * * *

Los apartados b y c podemos resolverlos utilizando el diagrama de Venn de estos dos sucesos. De los datos y cálculos realizados inicialmente y en el apartado a) se deduce que:

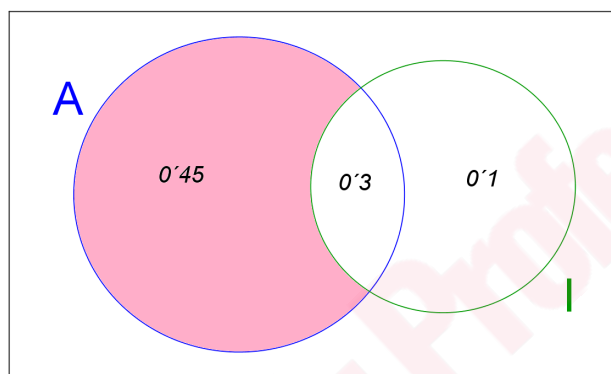
$$P(I) = 0.4$$

$$P(I \cap A) = 0.3$$

$$P(A) = 0.75 \rightarrow P(A^c) = 0.25$$



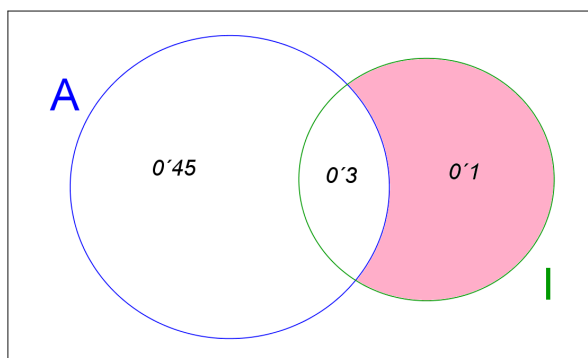
b) ¿ $P(A \cap I^c)$?



$$P(A \cap I^c) = 0.45$$

c) ¿ $P\left(\frac{I}{A^c}\right)$?

$I \cap A^c$ es:



$$P\left(\frac{I}{A^c}\right) = \frac{P(I \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4$$

Problema 6. Lanzamos un dado de 6 caras bien equilibrado. Si al lanzar el dado obtenemos un número mayor que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda bien construida; pero si al lanzar el dado obtenemos un número menor o igual que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz.

- Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado? (3 puntos)
- Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado” y “obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda”. (4 puntos)
- ¿Son independientes los sucesos “obtener un 6 al lanzar el dado” y “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda”? (3 puntos)

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

En el dado equilibrado,

$$A = \text{obtener un número mayor que dos} \rightarrow P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$B = \text{obtener un número menor o igual que dos} \rightarrow P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$C = \text{obtener cara}$ y $X = \text{obtener cruz}$

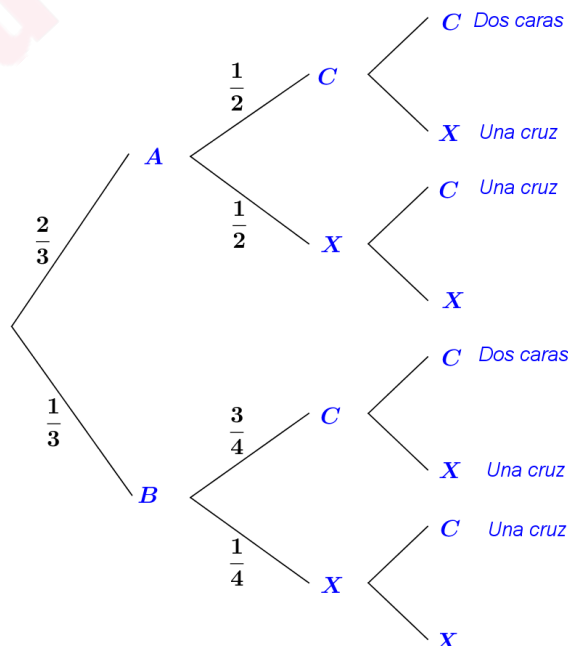
En la moneda bien construida, $P(C) = P(X) = \frac{1}{2}$.

En la moneda defectuosa la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz,

$$P(C) = 3 P(X) \rightarrow \text{como } P(C) + P(X) = 1 \rightarrow 3 P(X) + P(X) = 1 \rightarrow 4 P(X) = 1 \rightarrow P(X) = \frac{1}{4}$$

$$\text{y } P(C) = 3 \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

El árbol del problema es:



- a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado?

Llamando CC = obtener dos caras en los dos lanzamientos de la moneda,
la probabilidad pedida es: $P(A/CC)$

$$P(A/CC) = \frac{P(A \cap CC)}{P(CC)} = \frac{\frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{3}{4} \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{3}{16}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{48}} = \frac{8}{17} \cong 0'4706$$

Solución: $P(A/CC) = \frac{8}{17} \cong 0'4706$.

- b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado” y “obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda”

Llamando D = obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda
la probabilidad pedida es: $P(B \cup D)$

$$P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D) = \frac{1}{3} + \frac{13}{16} - \frac{5}{16} = \frac{5}{6} \cong 0'8333$$

$$P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(D) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{3}{4} \right) = \frac{2}{3} \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \frac{15}{16} = \frac{13}{16}$$

$$P(B \cap D) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{3} \frac{15}{16} = \frac{5}{16}$$

Solución: $P(B \cup D) = \frac{5}{6} \cong 0'8333$.

- c) ¿Son independientes los sucesos “obtener un 6 al lanzar el dado” y “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda”?

Llamamos: F = obtener un 6 al lanzar el dado y G = obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda.

F y G serán independientes si $P(F \cap G) = P(F) \cdot P(G)$

$$P(F) = \frac{1}{6}$$

$$P(G) = \frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{48} = \frac{3}{16}$$

$$P(F \cap G) = \{ \text{como se obtiene un 6 } (>2) \text{ la moneda que se lanza está bien construida} \} \frac{1}{6} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

$$P(F)P(G) = \frac{1}{6} \frac{3}{16} = \frac{1}{32} \neq \frac{1}{24} = P(F \cap G)$$

Solución: los sucesos “obtener un 6 al lanzar el dado” y “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda” no son independientes.