

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria ordinaria 2019-2020

El examen permite escoger cuatro preguntas entre ocho. Se desarrollan todas para repasar el temario completo.

A.1. Discusión y resolución de un sistema

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array} \right).$$

El determinante de A localiza los valores en los que puede cambiar el rango:

$$\det A = a(a+1).$$

Si $a \neq 0, -1$, el determinante no se anula, así que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. Como hay tres incógnitas, por Rouché-Frobenius el sistema es compatible determinado.

Caso $a = 0$. El sistema queda

$$\begin{cases} x + z = 1, \\ y - z = 0, \\ -y + z = 0. \end{cases}$$

Las dos últimas ecuaciones son opuestas; la primera y la segunda son independientes, por lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema es compatible indeterminado.

Caso $a = -1$. Las filas de coeficientes satisfacen $R_3 = \frac{1}{2}R_1 - \frac{1}{2}R_2$, así que $\text{rg}(A) = 2$. Sin embargo, los términos independientes no verifican esa misma relación: $\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(-2) = 1 \neq -1$. Lo confirma el menor de la ampliada formado por las columnas primera, segunda y de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(A^*) = 3 \neq \text{rg}(A)$ y el sistema es incompatible. **Conclusión.** El sistema es SCD si $a \neq 0, -1$, SCI si $a = 0$ y SI si $a = -1$.

b) Solución para $a = 0$

Con $a = 0$, de $y - z = 0$ resulta $y = z$. Tomando $z = t$, la primera ecuación da $x = 1 - t$:

$$(x, y, z) = (1 - t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $a = 0$, todas las soluciones son $(1 - t, t, t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

A.2. Teoremas, tangente e integral

Las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$ son polinómicas, por lo que son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$.

a) Existencia de un punto donde f y g coinciden

Consideramos la diferencia $h(x) = f(x) - g(x)$. Un cero de h es precisamente un punto donde $f(x) = g(x)$. Evaluamos en los extremos del intervalo:

$$h(1) = 1 + 3 - 1 - 6 = -3 < 0, \quad h(10) = 1000 + 300 - 1 - 60 = 1239 > 0.$$

Como h es continua y cambia de signo en $[1, 10]$, el teorema de Bolzano garantiza un punto interior donde $h(x) = 0$. **Conclusión.** Existe al menos un $c \in (1, 10)$ tal que $f(c) = g(c)$.

b) Tangente a f con pendiente mínima

La pendiente de la tangente en la abscisa x es $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x.$$

Para hallar su mínimo estudiamos la función pendiente. Su derivada es

$$f''(x) = 6x + 6.$$

Es negativa para $x < -1$ y positiva para $x > -1$, así que f' decrece hasta $x = -1$ y crece después. La pendiente mínima se alcanza en $x = -1$:

$$f'(-1) = 3 - 6 = -3, \quad f(-1) = -1 + 3 - 1 = 1.$$

La recta tangente por $(-1, 1)$ con pendiente -3 es

$$y - 1 = -3(x + 1).$$

Conclusión. La tangente de pendiente mínima es $y = -3x - 2$.

c) Integral definida

Como $g(x) = 6x$, descomponemos el cociente para integrar término a término:

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x} dx = \frac{1}{6} \int_1^2 \left(x^2 + 3x - \frac{1}{x} \right) dx.$$

Una primitiva es $\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{6} \ln x$. Evaluamos en los extremos:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx &= \left[\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{6} \ln x \right]_1^2 \\ &= \frac{41}{36} - \frac{1}{6} \ln 2. \end{aligned}$$

Conclusión. La integral vale $\frac{41}{36} - \frac{1}{6} \ln 2$.

A.3. Rectas y planos

La recta r es la intersección de dos planos. Tomamos $y = t$; de $x - y = 2$ resulta $x = t + 2$, y de $3x - z = -1$ obtenemos $z = 3t + 7$. Por tanto,

$$r : \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = t, \\ z = 7 + 3t, \end{cases} \quad \vec{d}_r = (1, 1, 3).$$

La otra recta ya está en forma paramétrica:

$$s : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda, \\ y = -4 - \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \vec{d}_s = (2, -1, 1).$$

a) Posición relativa

Los vectores directores no son proporcionales. Para comprobar si las rectas son coplanarias, tomamos $P_r = (2, 0, 7) \in r$ y $P_s = (-1, -4, 0) \in s$:

$$\overrightarrow{P_r P_s} = P_s - P_r = (-1 - 2, -4 - 0, 0 - 7) = (-3, -4, -7).$$

El producto mixto es

$$(\vec{d}_r \times \vec{d}_s) \cdot \overrightarrow{P_r P_s} = (4, 5, -3) \cdot (-3, -4, -7) = -11 \neq 0.$$

Los vectores no son coplanarios, así que las rectas no se cortan ni son paralelas. **Conclusión.** r y s son alabeadas.

b) Plano perpendicular a r por P

Un plano perpendicular a una recta tiene como vector normal un vector director de dicha recta. Usamos $\vec{n} = (1, 1, 3)$ y el punto $P = (2, -1, 5)$:

$$(x - 2) + (y + 1) + 3(z - 5) = 0.$$

Conclusión. El plano pedido es $x + y + 3z - 16 = 0$.

c) Plano paralelo a r que contiene a s

El plano debe contener la dirección $\vec{d}_s$ de s y ser paralelo a la dirección $\vec{d}_r$ de r . Un vector normal es el producto vectorial de estas dos direcciones:

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (4, 5, -3).$$

Lo hacemos pasar por $P_s = (-1, -4, 0)$:

$$4(x + 1) + 5(y + 4) - 3z = 0.$$

Conclusión. Una ecuación general del plano es $4x + 5y - 3z + 24 = 0$.

A.4. Probabilidad en lanzamientos sucesivos

Las probabilidades de acertar en los cuatro disparos son, respectivamente, 0,3, 0,4, 0,5 y 0,6. Cada una se aplica si el globo sigue intacto hasta ese lanzamiento.

a) El globo explota antes del cuarto disparo

Es más sencillo calcular el suceso complementario: que el globo no explote en ninguno de los tres primeros intentos. La probabilidad de fallar esos disparos es

$$(1 - 0,3)(1 - 0,4)(1 - 0,5) = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,21.$$

Por tanto,

$$P(\text{explota antes del cuarto}) = 1 - 0,21 = 0,79.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es 0,79.

b) El globo sigue intacto tras el cuarto disparo

Para que siga intacto, el arquero debe fallar los cuatro disparos. Multiplicamos las probabilidades sucesivas de fallo:

$$P(\text{intacto}) = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,084.$$

Conclusión. La probabilidad es 0,084.

c) Exactamente seis globos explotados al primer disparo

El número de aciertos en los primeros disparos de diez arqueros independientes sigue una binomial $X \sim \text{Bin}(10, 0,85)$. La probabilidad de exactamente seis aciertos es

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} (0,85)^6 (0,15)^4 = \frac{41058004869}{1024000000000} \approx 0,04010.$$

Conclusión. La probabilidad es aproximadamente 0,0401, es decir, un 4,01 %.

B.1. Precios de tres tipos de pescado

Sean d , l y r los precios, en euros por kilogramo, de la dorada, la lubina y el rodaballo. Una tonelada contiene 1000 kg; por eso, vender T toneladas a p euros/kg produce $Tp/1000$ millones de euros.

Precio del rodaballo

Los 7400 toneladas de rodaballo generaron 63,6 millones de euros:

$$\frac{7400}{1000}r = 63,6 \implies r = \frac{63,6}{7,4} = \frac{318}{37} \approx 8,59 \text{ €/kg.}$$

La dorada se vendió a 0,11 €/kg más que la lubina, así que $d = l + 0,11$. El valor restante de las ventas fue $275,8 - 63,6 = 212,2$ millones. Luego

$$\frac{13740}{1000}(l + 0,11) + \frac{23440}{1000}l = 212,2.$$

Despejamos:

$$37,18l = 212,2 - 13,74(0,11) = 210,6886, \\ l = \frac{1053443}{185900} \approx 5,67 \text{ €/kg,} \quad d = l + 0,11 = \frac{268473}{46475} \approx 5,78 \text{ €/kg.}$$

Conclusión. Los precios son: dorada $\approx 5,78$ €/kg, lubina $\approx 5,67$ €/kg y rodaballo $\approx 8,59$ €/kg.

B.2. Continuidad, derivabilidad y monotonía

La función está definida a trozos por polinomios, así que su dominio es todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq 1, \\ (x-1)^3, & x > 1. \end{cases}$$

a) Continuidad en $[-4, 4]$

Cada expresión polinómica es continua en su tramo. El único punto que hay que comprobar es $x = 1$. Se tiene

$$f(1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^3 = 0.$$

Los límites laterales coinciden con el valor de la función; por tanto, es continua en $x = 1$ y en todo $[-4, 4]$.

Conclusión. f es continua en todo el intervalo $[-4, 4]$.

b) Derivabilidad y crecimiento

Derivamos cada expresión en su tramo:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ 3(x-1)^2, & x > 1. \end{cases}$$

En $x = 1$, las derivadas laterales son

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x-1) = 0, \quad f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3(x-1)^2 = 0.$$

Como coinciden y la función es continua, f es derivable en 1 y $f'(1) = 0$. En $[-4, 1)$ la derivada es negativa; en $(1, 4]$ es positiva. Por ello decrece hasta 1 y crece después; $f(1) = 0$ es un mínimo. **Conclusión.** f es derivable en $[-4, 4]$, decreciente en $[-4, 1]$ y creciente en $[1, 4]$.

c) Continuidad y derivabilidad de $g = f'$ en $x = 1$

La función derivada sí está definida en 1 y queda

$$g(x) = f'(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ 3(x-1)^2, & x > 1. \end{cases}$$

Sus límites laterales en 1 son ambos 0, iguales a $g(1)$; por tanto, g es continua. Para derivabilidad comparamos las derivadas laterales de g :

$$g'_-(1) = 2, \quad g'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 6(x-1) = 0.$$

No coinciden, así que g no es derivable en $x = 1$. **Conclusión.** g está definida y es continua en 1, pero no es derivable en ese punto.

B.3. Proyección y planos

El plano es $\pi : x + 2y - 3z - 4 = 0$, con vector normal $\vec{n} = (1, 2, -3)$.

a) Proyección de Q sobre π

La proyección ortogonal de Q sobre el plano se encuentra desplazándose desde Q en la dirección normal. Para un plano $ax + by + cz + d = 0$:

$$H = Q - \frac{\vec{n} \cdot Q + d}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Aquí $Q = (-1, 0, 1)$, $d = -4$, $\vec{n} \cdot Q - 4 = -8$ y $\|\vec{n}\|^2 = 14$. Por tanto,

$$H = (-1, 0, 1) - \frac{-8}{14}(1, 2, -3) = (-1, 0, 1) + \frac{4}{7}(1, 2, -3) = \left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{5}{7}\right).$$

Se comprueba que sus coordenadas satisfacen $x + 2y - 3z = 4$. **Conclusión.** La proyección de Q sobre π es $\left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{5}{7}\right)$.

b) Plano paralelo a π por P

Los planos paralelos tienen el mismo vector normal, así que la ecuación buscada es $x + 2y - 3z + D = 0$. Al pasar por $P = (-3, 1, 2)$:

$$-3 + 2 - 6 + D = 0 \implies D = 7.$$

Conclusión. El plano paralelo es $x + 2y - 3z + 7 = 0$.

c) Plano perpendicular a π que contiene P y Q

El plano debe contener el vector

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1 - (-3), 0 - 1, 1 - 2) = (2, -1, -1).$$

Su vector normal debe ser perpendicular tanto a $\overrightarrow{PQ}$ como al normal de π , porque los planos han de ser perpendiculares. Tomamos su producto vectorial:

$$\vec{n}_p = \vec{n} \times \overrightarrow{PQ} = (1, 2, -3) \times (2, -1, -1) = (-5, -5, -5),$$

que es proporcional a $(1, 1, 1)$. Por el punto $P = (-3, 1, 2)$:

$$(x + 3) + (y - 1) + (z - 2) = 0.$$

Conclusión. El plano pedido es $x + y + z = 0$.

B.4. Sucesos

a) Compatibilidad de C con $A \cup B$

Como C es incompatible con A y con B , se cumple $C \cap A = \emptyset$ y $C \cap B = \emptyset$. Por la propiedad distributiva,

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) = \emptyset.$$

Conclusión. C y $A \cup B$ son incompatibles.

b) Independencia de A y B

Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Aquí

$$P(A)P(B) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125 = P(A \cap B),$$

por lo que cumplen la condición de independencia. **Conclusión.** A y B son independientes.

c) Probabilidad de que no ocurra ninguno

Por De Morgan, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Primero,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,25 - 0,125 = 0,625.$$

Así,

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,375 = \frac{3}{8}.$$

Conclusión. La probabilidad es $\frac{3}{8}$.

d) Probabilidad de $\overline{B}$ sabiendo que ocurrió A

Usamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(\overline{B} | A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,5 - 0,125}{0,5} = 0,75 = \frac{3}{4}.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es $\frac{3}{4}$.