

Se desarrollan las dos opciones completas para que el alumno pueda comparar los métodos.

Opción A

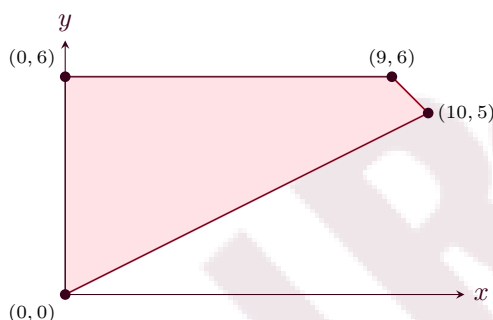
Ejercicio 1 · Programación lineal

El recinto viene determinado por $x + y \leq 15$, $x \leq 2y$, $0 \leq y \leq 6$ y $x \geq 0$. Para hallar sus vértices, intersectamos las rectas frontera y conservamos los puntos que cumplen todas las desigualdades. Obtenemos

$$(0, 0), \quad (0, 6), \quad (9, 6), \quad (10, 5).$$

Los vértices sobre los ejes y la recta horizontal son $(0, 0)$ y $(0, 6)$; las otras intersecciones factibles son $(9, 6)$, de $y = 6$ con $x + y = 15$, y $(10, 5)$, de $x = 2y$ con $x + y = 15$. El cruce de $x = 2y$ con $y = 6$, que es $(12, 6)$, queda fuera porque $12 + 6 > 15$.

Representación del recinto.



Como la función objetivo $F(x, y) = 8x + 5y$ es lineal, su máximo en el polígono se alcanza en alguno de los vértices. Evaluamos:

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 6)$	$(9, 6)$	$(10, 5)$
$F(x, y)$	0	30	102	105

$$F_{\max} = 105 \text{ en el vértice } (10, 5).$$

Ejercicio 2 · Crecimiento y extremos de una función

Al ser polinómica, $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. El signo de la derivada determina dónde crece o decrece:

$$f'(x) = 4x - x^2 = x(4 - x).$$

Los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 4$. El signo de los factores da $f' < 0$ si $x < 0$, $f' > 0$ si $0 < x < 4$ y $f' < 0$ si $x > 4$. Por tanto, decrece en $(-\infty, 0)$, crece en $(0, 4)$ y decrece en $(4, +\infty)$. El cambio de signo identifica los extremos:

$$f(0) = 0, \quad f(4) = 2 \cdot 16 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}.$$

Así, hay un mínimo relativo en $(0, 0)$ y un máximo relativo en $(4, \frac{32}{3})$.

La pendiente de la tangente es $f'(x)$. Para que valga 4, resolvemos

$$4x - x^2 = 4 \implies (x - 2)^2 = 0 \implies x = 2, \quad f(2) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

$$\text{Mínimo relativo } (0, 0); \quad \text{máximo relativo } \left(4, \frac{32}{3}\right); \quad \text{punto de pendiente 4: } \left(2, \frac{16}{3}\right).$$

Ejercicio 3 · Probabilidad total y condicionada

Sean B el suceso «va en autobús» y T «llega tarde». Los datos son $P(B) = 0,8$, $P(B^c) = 0,2$, $P(T | B) = 0,2$ y $P(T | B^c) = 0,1$. La probabilidad de cada camino se calcula multiplicando las probabilidades de sus ramas.

$$\text{a) } P(B \cap T^c) = P(B)P(T^c | B) = 0,8 \cdot 0,8 = 0,64.$$

Para llegar tarde sumamos los dos casos incompatibles (autobús o coche):

$$\text{b) } P(T) = 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,1 = 0,18.$$

La probabilidad de llegar a tiempo es $1 - 0,18 = 0,82$. Aplicamos probabilidad condicionada para calcular la probabilidad de que haya ido en coche, sabiendo que llegó a tiempo:

$$\text{c) } P(B^c | T^c) = \frac{P(B^c \cap T^c)}{P(T^c)} = \frac{0,2 \cdot 0,9}{0,82} = \frac{9}{41}.$$

$$P(B \cap T^c) = 0,64; \quad P(T) = 0,18; \quad P(B^c | T^c) = \frac{9}{41}.$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para una proporción

La proporción muestral de trabajadores que residen fuera es $\hat{p} = 118/500 = 0,236$, con $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,764$. Para un nivel de confianza del 93%, $z_{0,965} \approx 1,8119$. Usamos el intervalo aproximado $\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$; su semiamplitud es el error máximo:

$$E = 1,8119 \sqrt{\frac{0,236 \cdot 0,764}{500}} \approx 0,03441.$$

Por tanto,

$$IC_{93\%}(p) = 0,236 \pm 0,03441 \approx (0,2016, 0,2704).$$

$$IC_{93\%}(p) \approx (0,2016, 0,2704); \quad E \approx 0,0344.$$

Opción B

Ejercicio 1 · Operaciones y ecuación matricial

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculamos cada producto por separado:

$$A^T B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Restando elemento a elemento,

$$A^T B - AB^T = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Para resolver $AX + BA = B$, aislamos AX . Como

$$\det A = 2 - 3 = -1 \neq 0, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

podemos multiplicar por A^{-1} por la izquierda. Primero calculamos

$$BA = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B - BA = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$X = A^{-1}(B - BA) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -23 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 · Derivadas

Las dos funciones siguientes tienen dominio $\mathbb{R}$, pues $1 + x^2 > 0$ y la exponencial está definida para todo real. Aplicamos la regla del cociente a la primera:

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}(1 + x^2) - 2xe^{3x}}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^{3x}(3x^2 - 2x + 3)}{(1 + x^2)^2}.$$

Para $g(x) = \ln(x(1 + 3x^2))$, el argumento del logaritmo debe ser positivo. Como $1 + 3x^2 > 0$, su dominio es $x > 0$. Usando $(\ln u)' = u'/u$, con $u = x(1 + 3x^2)$:

$$g'(x) = \frac{1 + 9x^2}{x(1 + 3x^2)}.$$

La tercera función $h(x) = 2^{5x} + x^{-2}$ tiene dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; derivamos la exponencial de base constante y la potencia:

$$h'(x) = 5 \ln(2) 2^{5x} - \frac{2}{x^3}.$$

$$f'(x) = \frac{e^{3x}(3x^2 - 2x + 3)}{(1 + x^2)^2}; \quad g'(x) = \frac{1 + 9x^2}{x(1 + 3x^2)}; \quad h'(x) = 5 \ln(2) 2^{5x} - \frac{2}{x^3}.$$

Ejercicio 3 · Recuento de asistentes

Hay 180 personas, 100 mujeres y 60 pediatras; 20 personas son simultáneamente mujeres y pediatras. Definimos M «ser mujer» y P «ser pediatra».

$$\text{a)} \quad P(M \cap P) = \frac{20}{180} = \frac{1}{9}.$$

«No ser hombre ni ser pediatra» significa ser mujer y no ser pediatra. De las 100 mujeres, 20 son pediatras, por lo que quedan 80:

$$\text{b)} \quad P(M \cap P^c) = \frac{100 - 20}{180} = \frac{4}{9}.$$

$$\text{c)} \quad P(P) = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}.$$

$$P(M \cap P) = \frac{1}{9}; \quad P(M \cap P^c) = \frac{4}{9}; \quad P(P) = \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 4 · Contraste unilateral para la media

Se contrasta la afirmación de que la producción media es de 88 kg o más. Con desviación típica poblacional conocida $\sigma = 5$, planteamos una prueba unilateral a la izquierda:

$$H_0 : \mu \geq 88, \quad H_1 : \mu < 88.$$

La muestra tiene $n = 10$ y media

$$\bar{x} = \frac{80 + 83 + 87 + 95 + 86 + 92 + 85 + 83 + 84 + 95}{10} = 87 \text{ kg}.$$

Bajo el valor frontera $\mu_0 = 88$, el estadístico es

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{87 - 88}{5/\sqrt{10}} \approx -0,632.$$

Para $\alpha = 0,05$, la región crítica es $z < -1,645$, equivalente a $\bar{x} < 88 - 1,645 \cdot 5/\sqrt{10} \approx 85,40$. Como $-0,632 > -1,645$ (y $87 > 85,40$), no se rechaza H_0 . La muestra no aporta evidencia suficiente para concluir que la media sea menor que 88 kg; esto no demuestra por sí solo que la afirmación sea cierta.

No se rechaza H_0 al 5%: no hay evidencia suficiente de que $\mu < 88$ kg.