

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dos hermanos deciden invertir 10000 € cada uno en distintos productos financieros. El mayor invirtió una cantidad A en un producto que ha proporcionado un beneficio del 6%, una cantidad B en otro que ha dado una rentabilidad del 5% y el resto en un plazo fijo al 2% de interés. El hermano menor invirtió esas mismas cantidades en otros productos que le han proporcionado, respectivamente, unos beneficios del 4, 3 y 7%. Determinar las cantidades A, B y C invertidas si las ganancias del hermano mayor han sido 415 € y las del pequeño 460 €.

Solución:

Utilizamos las incógnitas (A, B y C) del enunciado. Obtengamos la ganancia de cada hermano,

	invierte	gana
Hermano mayor		
	A al 6%	0'06A
	B al 5%	0'05B
	C al 2%	0'02C
Hermano menor		
	A al 4%	0'04A
	B al 3%	0'03B
	C al 7%	0'07C

Cada hermano invierte 10000€, luego $A + B + C = 10000$

La ganancia del mayor es de 415€ luego $0'06 A + 0'05 B + 0'02 C = 415$

La ganancia del menor es de 460€ luego $0'04 A + 0'03 B + 0'07 C = 460$

Multiplicamos las dos últimas ecuaciones por 100 para quitar decimales.

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} A + B + C = 10000 \\ 6A + 5B + 2C = 41500 \\ 4A + 3B + 7C = 46000 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema; calculamos el determinante de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 35 + 18 + 8 - 20 - 6 - 42 = -7$$

como es distinto de cero el sistema tiene solución, lo resolvemos por Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 6 & 5 & 2 & 41500 \\ 4 & 3 & 7 & 46000 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 6F_1, F_3 - 4F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 0 & -1 & -4 & -18500 \\ 0 & -1 & 3 & 6000 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 0 & -1 & -4 & -18500 \\ 0 & 0 & 7 & 24500 \end{array} \right)$$

De la 3ª fila obtenemos la ecuación $7C = 24500$, luego $C = 3500$

De la 2ª fila

$$\begin{aligned} -B - 4C &= -18500 \\ -B - 4 \cdot 3500 &= -18500; \quad -B - 14000 = -18500; \\ B &= 18500 - 14000 \\ B &= 4500 \end{aligned}$$

De la 1ª fila

$$\begin{aligned} A + B + C &= 10000 \\ A + 4500 + 3500 &= 10000 \\ A + 8000 &= 10000; \quad A = 10000 - 8000; \quad A = 2000 \end{aligned}$$

Solución: Las cantidades son $A = 2000$ €, $B = 4500$ € y $C = 3500$ €.

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Representar la región factible dada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y &\geq -1 \\ x &\leq 2 \\ y &\geq -1 \\ x &\geq 3y - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

y hallar los puntos de la región en los que la función $f(x,y) = 2x + 3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y obtener dichos valores.

Solución:

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$$x + y \geq -1 \qquad x \geq 3y - \frac{1}{2}$$

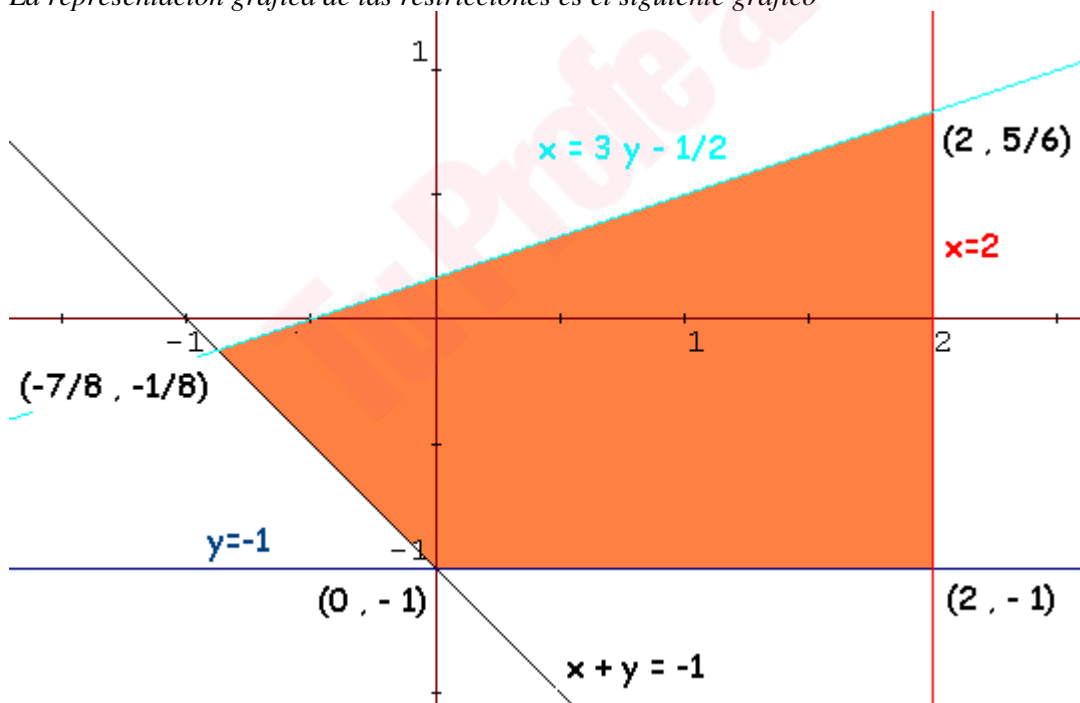
$$x + y = -1 \qquad x = 3y - \frac{1}{2}$$

x	y
0	-1
-1	0

x	y
0	1/6
-1/2	0

$(0,0)$ ¿cumple la restricción? Sí $\left| \begin{array}{l} (0,0) \text{ ¿cumple la restricción? Sí} \\ 0 + 0 \geq -1 \text{ Sí} \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} (0,0) \text{ ¿cumple la restricción? Sí} \\ 0 \geq 3 \cdot 0 - 1/2 \text{ Sí} \end{array} \right.$

La representación gráfica de las restricciones es el siguiente gráfico



Calculemos los puntos de corte que necesitamos conocer,

$\begin{cases} x + y = -1 \\ y = -1 \end{cases}$	Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación $x - 1 = -1$; $x = 0$	El punto de corte es $(0, -1)$
--	--	-----------------------------------

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$	El punto de corte es $(2, -1)$
---	--------------------------------

$\begin{cases} x = 3y - \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$	Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación, $2 = 3y - \frac{1}{2} \rightarrow 2 + \frac{1}{2} = 3y \rightarrow \frac{5}{2} = 3y$	El punto de corte es $\left(2, \frac{5}{6}\right)$
---	---	---

$\begin{cases} x = 3y - \frac{1}{2} \\ x + y = -1 \end{cases}$	Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación, $3y - \frac{1}{2} + y = -1 \rightarrow 4y = -1 + \frac{1}{2} \rightarrow 4y = -\frac{1}{2}$ $y = 3 \frac{-1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{-7}{8}$	El punto de corte es $\left(\frac{-7}{8}, \frac{-1}{8}\right)$
--	--	---

La región factible está formada por los puntos de la zona coloreada.

Estudiamos la función $f(x,y)$ en los extremos de la región factible,

(x,y)	$f(x,y) = 2x + 3y$		Solución:
$(0, -1)$	-3	mínimo	El mínimo se alcanza en $(0, -1)$ y vale -3 El máximo se alcanza en $\left(2, \frac{5}{6}\right)$ y vale 6'5.
$(2, -1)$	1		
$\left(2, \frac{5}{6}\right)$	$2 \cdot 2 + 3 \left(\frac{5}{6}\right) =$ $4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2} = 6'5$	máximo	
$\left(\frac{-7}{8}, \frac{-1}{8}\right)$	$2 \left(\frac{-7}{8}\right) + 3 \left(\frac{-1}{8}\right) =$ $-\frac{14}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{17}{8}$		

Tu Profeta al Rescate

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. En unos almacenes se tienen 2000 Kg. de alimentos perecederos que se pueden vender a 3 € el Kg., pero si se venden más tarde, el precio aumenta en 0,1 € el Kg. cada día. Calcular cuándo interesa vender estos alimentos para tener los máximos ingresos si cada día que pasa se estropean 50 Kg. de ellos. ¿Cuáles son estos ingresos máximos? ¿Cuántos los kilos que se venden y a qué precio? Justificar que es máximo.

Solución:

Inicialmente tenemos:

2000 Kg. de alimentos a 3 €/Kg.

cada día que pasa aumenta el precio 0'1 €/Kg. pero se pierden 50 Kg.

Al cabo de x días,

Kg. de alimentos = $2000 - 50x$

precio del Kg. = $3 + 0'1x$

ingresos = $(2000 - 50x) \cdot (3 + 0'1x)$

(Nota: ¿Al cabo de cuántos días nos quedaremos sin alimentos?, $2000 - 50x = 0$; $2000 = 50x$; $x = 40$; Al cabo de 40 días)

Llamando $I(x)$ a lo ingresos al cabo de x días,

$$I(x) = (2000 - 50x) \cdot (3 + 0'1x) = 6000 - 150x + 200x - 5x^2 = -5x^2 + 50x + 6000$$

Obtenemos el máximo de esta función,

$$I'(x) = -10x + 50$$

$$-10x + 50 = 0; \quad 50 = 10x; \quad x = 5$$

$$I''(x) = -10; \quad \text{para } x = 5 \quad I''(5) = -10 < 0 \quad \text{luego para } x = 5 \text{ hay un máximo relativo.}$$

Este máximo relativo es el máximo absoluto de la función $I(x)$ ya que esta función es una parábola de coeficiente de x^2 negativo.

Por lo tanto, se venderán $2000 - 50 \cdot 5 = 2000 - 250 = 1750$ Kg.

$$\text{a } 3 + 0'1 \cdot 5 = 3 + 0'5 = 3'50 \text{ €/Kg.}$$

$$\text{obteniendo unos ingresos de } 1750 \cdot 3'50 = 6125 \text{ €}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. En un grupo de 2º de bachillerato el 15% estudia Matemáticas, el 30% estudia Economía y el 10% ambas materias. Se pide:

- ¿Son independientes los sucesos *Estudiar Matemáticas* y *Estudiar Economía*?
- Si se escoge un estudiante del grupo al azar, calcular la probabilidad de que no estudie ni Matemáticas ni Economía.

Solución:

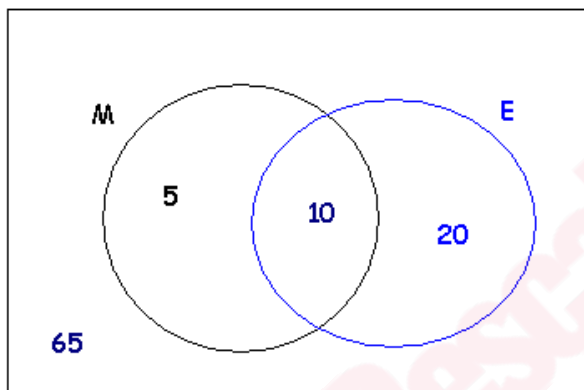
Consideramos los siguientes sucesos:

M = estudiar Matemáticas

E = estudiar Economía

Por el enunciado conocemos que $P(M) = 0'15$, $P(E) = 0'30$ y $P(M \cap E) = 0'10$

El diagrama de los sucesos sería:



- Para comprobar si los sucesos M y E son independientes veamos si se cumple que $P(M/E) = P(M)$ y $P(E/M) = P(E)$

$$P(M/E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{0'10}{0'30} = 0'33 \neq 0'15 = P(M)$$

$$P(E/M) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)} = \frac{0'10}{0'15} = 0'67 \neq 0'30 = P(E)$$

Por lo tanto los sucesos M y E no son independientes.

- No estudiar ni Matemáticas ni Economía es el suceso $\overline{M \cup E} = \overline{M} \cap \overline{E}$ (por las leyes de Morgan)

$$P(\overline{M \cup E}) = 1 - P(M \cup E) = 1 - [P(M) + P(E) - P(M \cap E)] = 1 - [0'15 + 0'30 - 0'10] = 1 - 0'35 = 0'65$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Calcular la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial $A X B = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Solución:

La ecuación matricial $A X B = C$ podremos resolverla si existen las inversas de las matrices A y B .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$$

Calculamos A^{-1} y B^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X ,

$$A X B = C$$

$$A^{-1} A X B B^{-1} = A^{-1} C B^{-1}$$

$$X = A^{-1} C B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2 & -2+2 \\ -6+6 & -4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Una empresa farmacéutica tiene en la actualidad dos líneas de investigación, la de medicamentos antiinflamatorios no esteroides y la de fármacos ansiolíticos. Desea invertir en la investigación a lo sumo tres millones de euros, con la condición de dedicar por lo menos 1,5 millones de euros a los ansiolíticos, con los que espera obtener un beneficio del 10%. En cambio en la investigación sobre medicamentos antiinflamatorios, aunque se calcula un beneficio del 25%, no debe invertir más de un millón de euros. ¿Qué cantidad debe dedicar a cada línea de investigación para maximizar beneficios, si además debe dedicar a los ansiolíticos al menos el doble de dinero que a los antiinflamatorios? ¿Qué beneficio obtendrá de esta forma la empresa?

Solución:

Consideramos las siguientes incógnitas: $x = \text{millones de euros para medicamentos anti. no esteroides}$
 $y = \text{millones de euros para fármacos ansiolíticos}$

Del enunciado del problema deducimos,

“Desea invertir a lo sumo 3 millones de euros” $x + y \leq 3$

“dedicar por lo menos 1'5 millones a ansiolíticos” $y \geq 1'5$

“en medicamentos no debe invertir más de 1 millón” $x \leq 1$

“debe dedicar a fármacos al menos el doble que a medicamentos” $y \geq 2x$

Como x e y son el dinero a invertir, deben ser números positivos $x \geq 0$ $y \geq 0$

El beneficio que obtendrá viene dado por la expresión $z = 0'25x + 0'1y$

El problema a resolver es,

maximizar $z = 0'25x + 0'1y$

s. a.

$$x + y \leq 3$$

$$x \leq 1$$

$$y \geq 1'5$$

$$y \geq 2x$$

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Cálculos para representar gráficamente las restricciones,

$$x + y \leq 3$$

$$y \geq 2x$$

$$x + y = 3$$

$$y = 2x$$

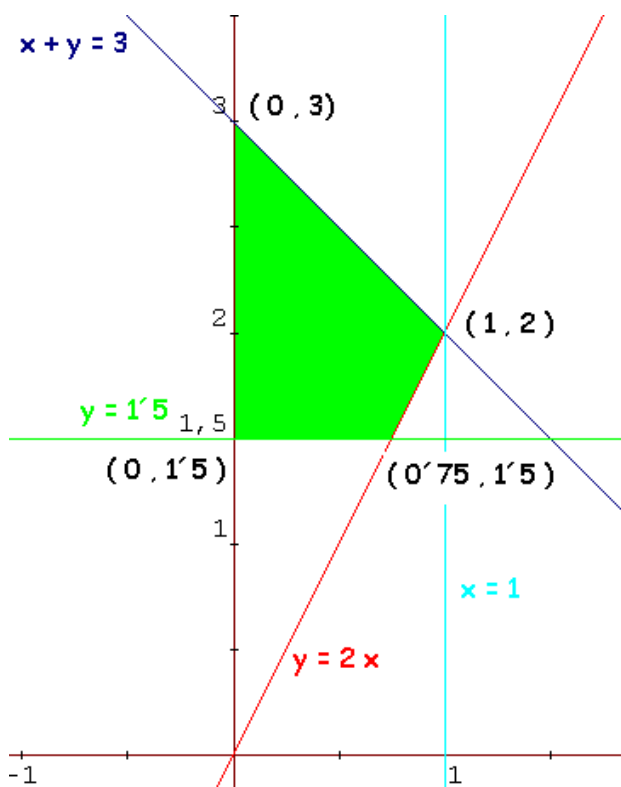
x	y
0	3
3	0

x	y
0	0
1	2

$(0,0)$ ¿cumple la restricción? Sí $0 + 0 \leq 3$ Sí

$(1,0)$ ¿cumple la restricción? No $0 \geq 2 \cdot 1$ No

La representación gráfica de las restricciones es el siguiente gráfico



Calculemos los puntos de corte que necesitamos conocer,

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1.5 \end{cases}$	El punto de corte es $(0, 1.5)$
--	---------------------------------

$\begin{cases} y = 2x \\ y = 1.5 \end{cases}$	Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación $1.5 = 2x$; $x = 0.75$	El punto de corte es $(0.75, 1.5)$
---	---	------------------------------------

$\begin{cases} y = 2x \\ x = 1 \end{cases}$	Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación, $y = 2 \cdot 1 = 2$	El punto de corte es $(1, 2)$
---	--	-------------------------------

$\begin{cases} x + y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$	Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación, $0 + y = 3$; $y = 3$	El punto de corte es $(0, 3)$
--	--	-------------------------------

La región factible está formada por los puntos de la zona coloreada.

Estudiamos la función z en los extremos de la región factible,

(x, y)	$z = 0.25x + 0.1y$	
$(0, 1.5)$	0.15	
$(0.75, 1.5)$	$0.25 \cdot 0.75 + 0.1 \cdot 1.5 = 0.3375$	
$(1, 2)$	$0.25 \cdot 1 + 0.1 \cdot 2 = 0.45$	máximo
$(0, 3)$	$0.25 \cdot 0 + 0.1 \cdot 3 = 0.3$	

El beneficio máximo lo obtendrá dedicando 1 millón de euros a medicamentos antiinflamatorios no esteroideos y 2 millones de euros a fármacos ansiolíticos; obtendrá un beneficio de 0.45 millones de euros, es decir, 450000 €.

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Hallar el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 + 2x + 1$, el eje de abscisas, la recta $x = -2$ y la recta $x = 5$.

Solución:

Representemos el recinto dado,

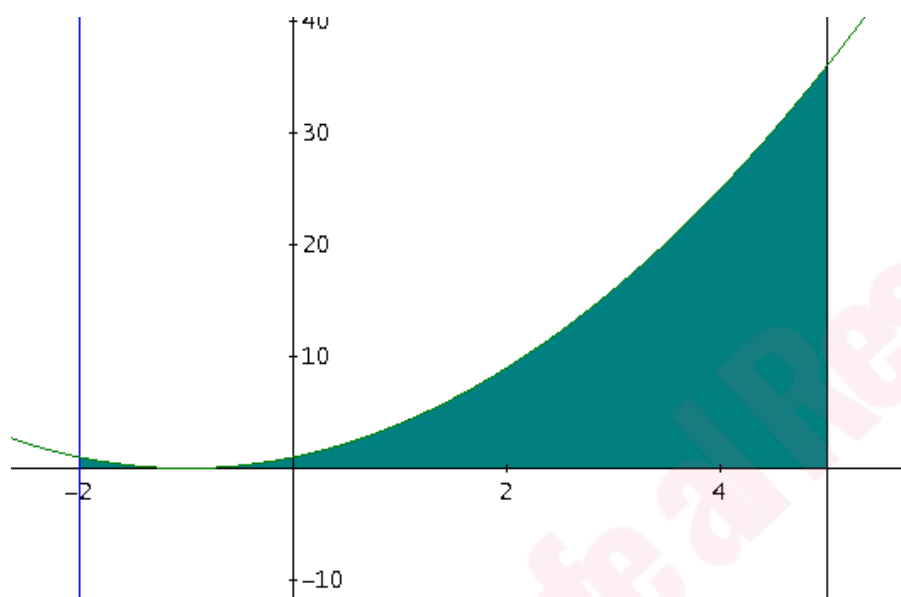
$y = x^2 + 2x + 1$, es una parábola, buscamos puntos de corte con los ejes y el vértice

corte eje OY; $x = 0$ luego $y = 1$ punto de corte $(0, 1)$

corte eje OX; $y = 0$ luego $x^2 + 2x + 1 = 0$; $(x + 1)^2 = 0$; $x + 1 = 0$; $x = -1$ punto de corte $(-1, 0)$

el vértice coincide con $(-1, 0)$

las rectas $x = -2$ e $x = 5$ son rectas verticales



El recinto del que queremos calcular su área es la zona coloreada del dibujo anterior. El cálculo de su área lo realizaremos mediante la integral de la parábola desde -2 hasta 5 .

La parábola $y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$; utilizaremos esta última expresión que será más sencilla de integrar,

$$A = \int_{-2}^5 (x+1)^2 dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_{-2}^5 = \frac{(5+1)^3}{3} - \frac{(-2+1)^3}{3} = \frac{216}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{216}{3} + \frac{1}{3} = \frac{217}{3} = 72\frac{1}{3} \text{ u. a.}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. En un centro escolar, 22 de cada 100 chicas y 5 de cada 10 chicos llevan gafas. Si el número de chicas es tres veces superior al de chicos, hallar la probabilidad de que un estudiante elegido al azar:

- No lleve gafas
- Sea chica y lleve gafas
- Sea chica, sabiendo que lleva gafas.

Solución:

Consideramos los sucesos:

G = Llevar gafas

B = ser chica

C = ser chico

De los datos del problema sabemos:

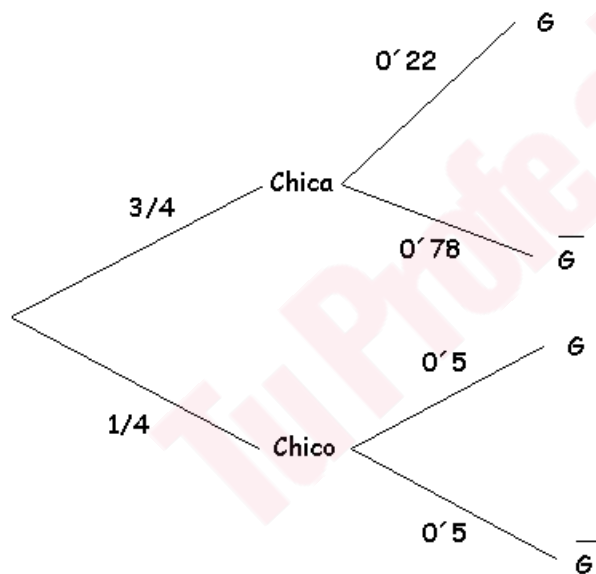
$$P(G/B) = 22/100 = 0'22$$

$$P(G/C) = 5/10 = 0'5$$

$P(B) = 3 P(C)$; como la población estudiada del centro escolar está formada chicos y chicas se cumple que $P(B) + P(C) = 1$

$$\begin{array}{l} \text{Resolviendo el sistema} \quad \begin{cases} P(B) + P(C) = 1 \\ P(B) = 3P(C) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sustituyendo } P(B) \text{ en la 1ª ecuación} \\ 3P(C) + P(C) = 1 \\ 4P(C) = 1; \quad P(C) = 1/4 \\ \text{Luego } P(B) = 3/4 \end{array} \end{array}$$

El árbol del problema es,



a)

$$P(\bar{G}) = P\left(\frac{\bar{G}}{B}\right)P(B) + P\left(\frac{\bar{G}}{C}\right)P(C) = 0'78 \frac{3}{4} + 0'5 \frac{1}{4} = 0'71$$

b)

$$P(B \cap G) = \frac{3}{4} 0'22 = 0'165$$

c)

$$P\left(\frac{B}{G}\right) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{0'165}{P\left(\frac{G}{B}\right)P(B) + P\left(\frac{G}{C}\right)P(C)} = \frac{0'165}{0'22 \frac{3}{4} + 0'5 \frac{1}{4}} = \frac{0'165}{0'29} = 0'569$$