Lista de Exercícios - Trigonometria

Rafael - Lumen Edu

October 23, 2024

Exercícios

1. (UFAL) O seno de um arco de medida 2370° é igual a:
   - A. -1
   - B. -1/2
   - C. 0
   - D. $\sqrt{3}/2$
   - E. 1
2. (IFAL) Considerando-se o arco trigonométrico $\alpha = \frac{23\pi}{3}$ rad, assinale a alternativa falsa:
   - A. $\alpha = 1380°$
   - B. α dá três voltas e para no 4° quadrante.
   - C. $\sin(\alpha) = -\sin(60°)$
   - D. $\cos(\alpha) = \cos(60°)$
   - E. α dá três voltas e para no 1° quadrante.
3. (PUC) Se $\sin(x) = -1$, então o valor de $\sin(3x)$ é:
   - A. -1/3
   - B. 0
   - C. 1
   - D. -1
   - E. -3
4. (Carlos Chagas) O número de soluções da equação $\cos(2x) = 1/2$ no intervalo $[-\pi, \pi]$ é:
   - A. 0
   - B. 1
   - C. 2

- D. 3
- E. 4

5. (Mackenzie-SP) Três ilhas A, B e C aparecem num mapa em escala 1:10000. A distância entre as ilhas A e B é:

   - A. 2,3 km
   - B. 2,1 km
   - C. 1,9 km
   - D. 1,4 km
   - E. 1,7 km

6. (UF-Juiz de Fora) Dois lados de um triângulo medem 8 m e 10 m e formam um ângulo de 60°. O terceiro lado mede:

   - A. $2\sqrt{21}$ m
   - B. $2\sqrt{31}$ m
   - C. $2\sqrt{41}$ m
   - D. $2\sqrt{51}$ m
   - E. $2\sqrt{61}$ m

7. (UECE) O menor lado de um paralelogramo, cujas diagonais medem $8\sqrt{2}$ m e 10 m e formam um ângulo de 45°, mede:

   - A. $\sqrt{13}$ m
   - B. $\sqrt{17}$ m
   - C. $13\sqrt{2}/4$ m
   - D. $17\sqrt{2}/5$ m

8. (Cesgranrio) Uma rampa plana, de 36 m de comprimento, faz um ângulo de 30° com o plano horizontal. A elevação vertical é de:

   - A. $6\sqrt{3}$ m
   - B. 12 m
   - C. 13,6 m
   - D. $9\sqrt{3}$ m
   - E. 18 m

9. (UFJF) Considerando-se os pontos a seguir, qual não pode estar sobre uma reta de inclinação $0°, 30°, 45°, 60°$ ou 90° em relação ao eixo horizontal?

   - A. (0, $10\sqrt{3}$)
   - B. ($10\sqrt{3}$)
   - C. $(10\sqrt{3}, 10\sqrt{3})$

- D. $(10\sqrt{3}, 5/\sqrt{3})$
- E. $(10\sqrt{3}, 5)$

Exercícios Desafiadores

10. (ITA 2018) Com relação à equação

$$\frac{\tan^3(x) - 3\tan(x)}{1 - 3\tan^2(x)} + 1 = 0$$

podemos afirmar que:

- A. No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é igual a 0.
- B. No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é maior que 0.
- C. A equação admite apenas uma solução real.
- D. Existe uma única solução no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- E. Existem duas soluções no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

11. (IME 2018) O número de soluções reais da equação abaixo é:

$$(\cos(x))^{2018} = 2 - 2^{(x/\pi)^2}$$

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3
- E. 4

Gabarito

- 1. B
- 2. E
- 3. C
- 4. E
- 5. E
- 6. A
- 7. B
- 8. E
- 9. D
- 10. B
- 11. D

Soluções dos desafios

Exercício 1

A equação é:

$$\frac{\tan^3(x) - 3\tan(x)}{1 - 3\tan^2(x)} + 1 = 0$$

Primeiramente, devemos simplificar a equação. É possível manipular algebricamente a expressão, passando a equações com as tangentes para o outro lado com sinal negativo e multiplicando ambos lados por $1 - 3\tan^2(x)$, para então analisar o problema como uma equação polinomial em $\tan(x)$. Porém, a abordagem mais adequada seria notar que a expressão com as tangentes é igual à $-\tan(3x)$:

$$\frac{\tan^3(x) - 3\tan(x)}{1 - 3\tan^2(x)} = -\tan(3x) \implies -\tan(3x) - 1 = 0 \implies \tan(3x) = 1$$

$$\tan(3x) = 1 \implies 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Assim, dentro do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que:

$$3x = \frac{\pi}{4} \implies x = \frac{\pi}{12}$$

$$3x = \frac{5\pi}{4} \implies x = \frac{5\pi}{12}$$

Ambas soluções estão no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
Assim, temos que a soma dessas soluções é maior que 0, portanto a alternativa correta é a letra B. Além disso, conseguimos provar as demais alternativas como falsas.

Exercício 2

A equação dada é:

$$(\cos(x))^{2018} = 2 - 2^{(x/\pi)^2}$$

Analisemos as partes separadamente:

1. O lado esquerdo é $(\cos(x))^{2018}$, que é sempre não negativo, pois $\cos(x)$ é elevado a um expoente par. Portanto, varia entre 0 e 1.

2. O lado direito é $2 - 2^{(x/\pi)^2}$. Essa função é decrescente em relação a $|x|$, começa em 1 quando $x = 0$ e se torna negativa para $x > \pi$.

Soluções encontradas:

$x = 0$ é uma solução, pois $LHS = RHS = 1$.

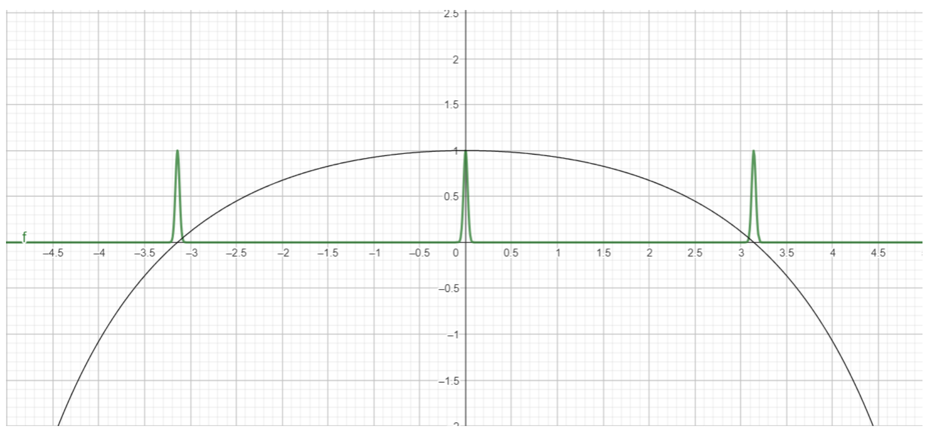
Para as demais soluções, o método mais conveniente é desenhar os gráficos delas. Percebe-se que o gráfico de $\cos(x)^{2018}$ será praticamente inteiro com $y = 0$ e terá picos nos múltiplos de π onde $y = 1$. O gráfico de $2 - 2^{(x/\pi)^2}$ não precisa ser desenhado, apenas é necessáio checar 3 pontos, que são onde x é igual à $-\pi$, 0 e π. Podemos ver que para essa função

$$x = -\pi \implies y = 0$$

$$x = 0 \implies y = 1$$

$$x = \pi \implies y = 0$$

Assim, vê-se que os gráficos se interceptam em x=0 e em um ponto entre 0 e π e outro ponto entre $-\pi$ e 0.Portanto, o número total de soluções reais é:3. Para facilitar a vizualização, o gráfico é o seguinte:


f