

Junio de 2021 · Convocatoria ordinaria

El examen pide elegir tres problemas de seis. Resolvemos los seis para que queden disponibles todas las soluciones.

Problema 1 · Sistema con parámetro

El sistema es

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = 2, \\ x + (a-1)y + 2z = 1, \\ 2x + ay + z = -1. \end{cases}$$

Para clasificarlo aplicamos Rouché–Frobenius: comparamos el rango de la matriz de coeficientes A con el de la ampliada A^* , y con el número de incógnitas, que es 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Clasificación según a

Primero calculamos el determinante de A :

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (a+1) \begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 2 & a \end{vmatrix} \\ &= (-a-1) - (-3) + (a+1)(2-a) \\ &= (2-a)(a+2) = 4 - a^2. \end{aligned}$$

Si $\det A \neq 0$, entonces $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada tiene tres filas, así que también $\text{rg}(A^*) = 3$. Por Rouché–Frobenius, el sistema es compatible determinado (SCD). Esto sucede cuando $a \neq 2$ y $a \neq -2$.

Hay que estudiar por separado los dos valores que anulan el determinante.

- **Caso $a = 2$.** Las dos primeras filas de A , usando las columnas primera y tercera, dan el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A) \geq 2$. Como $\det A = 0$, el rango no puede ser 3, así que $\text{rg}(A) = 2$. En la ampliada se cumple $F_3 = -3F_1 + 5F_2$; por tanto $\text{rg}(A^*) \leq 2$. El mismo menor no nulo prueba que $\text{rg}(A^*) \geq 2$, y queda $\text{rg}(A^*) = 2$. Así,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3,$$

de modo que el sistema es compatible indeterminado (SCI).

- **Caso $a = -2$.** El menor de A formado por las dos primeras filas y columnas es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Luego $\text{rg}(A) \geq 2$, y como el determinante es cero, $\text{rg}(A) = 2$. En la matriz ampliada, $F_3 - F_1 - F_2 = (0, 0, 0 \mid -4)$. La incompatibilidad también se ve en el menor de A^* formado por las columnas x, y y la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A^*) = 3$, distinto de $\text{rg}(A) = 2$, y el sistema es incompatible (SI).

En conclusión:

$a \neq \pm 2$	: SCD,
$a = 2$	: SCI,
$a = -2$	: SI.

b) Soluciones cuando el sistema es compatible

Para $a \neq \pm 2$ podemos aplicar la regla de Cramer. Con $\Delta = \det A = 4 - a^2$, sustituimos una columna cada vez por los términos independientes:

$$\begin{aligned}\Delta_x &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix} = (2a+3)(a-2), \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3(2-a), \\ \Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = 4(2-a).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{(2a+3)(a-2)}{(2-a)(a+2)} = -\frac{2a+3}{a+2}, \\ y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3(2-a)}{(2-a)(a+2)} = \frac{3}{a+2}, \\ z &= \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{4(2-a)}{(2-a)(a+2)} = \frac{4}{a+2}.\end{aligned}$$

La solución determinada es

$$(x, y, z) = \left(-\frac{2a+3}{a+2}, \frac{3}{a+2}, \frac{4}{a+2} \right), \quad a \neq \pm 2.$$

Para $a = 2$, ya sabemos que el sistema es SCI. Restamos la segunda ecuación de la primera: $z = 1$. Al sustituir en la segunda, $x + y + 2 = 1$, así que $x + y = -1$. Tomamos $y = t$ como parámetro libre y obtenemos

$$(x, y, z) = (-1 - t, t, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

No hay soluciones para $a = -2$, porque ese caso es incompatible.

Problema 2 · Posición relativa de tres planos

Escribimos los planos en forma general:

$$\pi_1 : x + y + z - a + 1 = 0,$$

$$\pi_2 : 2x + y + az - a = 0,$$

$$\pi_3 : x + ay + z - 1 = 0.$$

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Posición según a

Calculamos primero el determinante:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \\ &= (1 - a^2) - (2 - a) + (2a - 1) \\ &= -a^2 + 3a - 2 = -(a-1)(a-2). \end{aligned}$$

Si $a \neq 1, 2$, el determinante no es cero: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. Los tres planos se cortan en un punto. Para concretarlo, la regla de Cramer da

$$\begin{aligned} \Delta_x &= (a^2 - 1)(2 - a), & x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = a + 1, \\ \Delta_y &= (2 - a)^2, & y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2 - a}{a - 1}, \\ \Delta_z &= a(a - 2), & z &= \frac{\Delta_z}{\Delta} = -\frac{a}{a - 1}. \end{aligned}$$

Por tanto, el punto común cuando $a \neq 1, 2$ es

$$\left(a + 1, \frac{2 - a}{a - 1}, -\frac{a}{a - 1} \right).$$

Para $a = 1$, $\det A = 0$. El menor de A de las dos primeras filas y columnas es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

así que $\text{rg}(A) = 2$. En A^* , el menor formado por las columnas x, y y la columna independiente vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

de modo que $\text{rg}(A^*) = 3$. Los tres planos no tienen un punto común. En particular, $\pi_1 : x + y + z = 0$ y $\pi_3 : x + y + z = 1$ son paralelos distintos; π_2 corta a cada uno por separado.

Para $a = 2$, las ecuaciones quedan

$$x + y + z = 1, \quad 2x + y + 2z = 2, \quad x + 2y + z = 1.$$

El menor de A usado antes sigue siendo -1 , por lo que $\text{rg}(A) \geq 2$; el determinante nulo da $\text{rg}(A) = 2$. Restando dos veces la primera ecuación de la segunda se obtiene $-y = 0$; restando la primera de la tercera se obtiene $y = 0$. Las ecuaciones independientes se reducen a $y = 0$, $x + z = 1$, también compatibles en la ampliada. Así, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$: los tres planos se cortan en una recta.

En resumen,

$a \neq 1, 2$	: los tres planos concurren en un punto,
$a = 1$	: no hay punto común; $\pi_1 \parallel \pi_3$,
$a = 2$	: los tres planos contienen una recta común.

b) Corte entre π_1 y π_3 si $a = 1$

Al sustituir $a = 1$,

$$\pi_1 : x + y + z = 0, \pi_3 : x + y + z = 1.$$

Tienen el mismo vector normal $(1, 1, 1)$, pero distintos términos independientes. Son planos paralelos distintos; por tanto,

$$\pi_1 \cap \pi_3 = \emptyset.$$

c) Corte entre π_1 y π_2 si $a = 2$

El sistema que define la intersección es

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + y + 2z = 2. \end{cases}$$

Restamos dos veces la primera ecuación de la segunda: $-y = 0$, luego $y = 0$. La primera ecuación queda $x + z = 1$. Si $z = t$, entonces $x = 1 - t$, y la recta en forma paramétrica es

$$\ell : x = 1 - t, y = 0, z = t, t \in \mathbb{R}.$$

Problema 3 · Dominio, asíntotas, monotonía e integral

La función es

$$f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}.$$

a) Dominio y asíntotas

El denominador no puede ser cero:

$$x(x+2) \neq 0 \iff x \neq 0 \text{ y } x \neq -2.$$

Así, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$. En esos dos puntos el numerador no se anula, de modo que son candidatos a asíntotas verticales. Comprobamos los límites laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= -\infty. \end{aligned}$$

Luego las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 0$.

Para $x \rightarrow \pm\infty$, dividimos numerador y denominador por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 0.$$

La asíntota horizontal en ambos extremos es $y = 0$. No existe asíntota oblicua, porque la función ya tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

b) Crecimiento, decrecimiento y extremos

Aplicamos la regla del cociente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x(x+2) - (x-1)(2x+2)}{[x(x+2)]^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 2(x^2 - 1)}{x^2(x+2)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 2x + 2}{x^2(x+2)^2}. \end{aligned}$$

En el dominio, el denominador es positivo. Igualamos a cero el numerador:

$$-x^2 + 2x + 2 = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Denotamos $\alpha = 1 - \sqrt{3}$ y $\beta = 1 + \sqrt{3}$. Ordenando con los puntos fuera del dominio, obtenemos los intervalos

$$(-\infty, -2), (-2, \alpha), (\alpha, 0), (0, \beta), (\beta, \infty).$$

Probamos un valor dentro de cada intervalo y estudiamos solo el signo de f' :

Intervalo	Valor de prueba	f' en la prueba	Signo	Comportamiento
$(-\infty, -2)$	-3	$-13/9$	$-$	Decrece
$(-2, \alpha)$	-1	-1	$-$	Decrece
$(\alpha, 0)$	$-1/2$	$4/3$	$+$	Crece
$(0, \beta)$	1	$1/3$	$+$	Crece
(β, ∞)	3	$-1/225$	$-$	Decrece

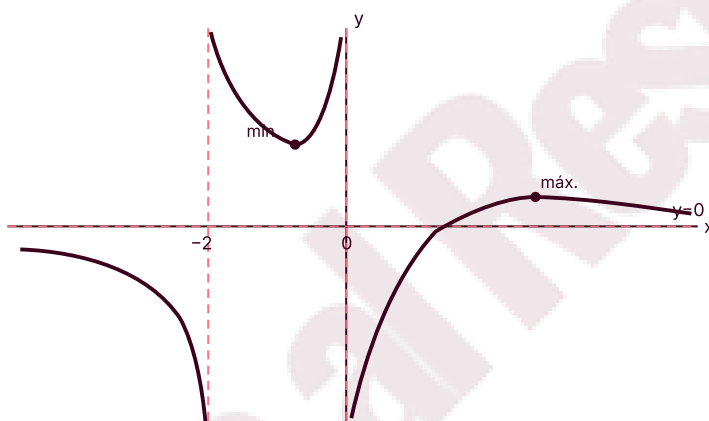
En $x = \alpha$, el signo pasa de $-$ a $+$, así que hay un mínimo relativo. En $x = \beta$, pasa de $+$ a $-$, así que hay un máximo relativo. Sustituimos para hallar sus ordenadas:

$$f(1 - \sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{6 - 4\sqrt{3}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f(1 + \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por tanto, el mínimo es $(1 - \sqrt{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$ y el máximo es $(1 + \sqrt{3}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$. Los puntos $x = -2$ y $x = 0$ no pertenecen al dominio: separan ramas y son asíntotas, no máximos ni mínimos.

Esbozo propio de la gráfica, con asíntotas discontinuas y extremos señalados:



c) Integral indefinida

Descomponemos en fracciones simples. Buscamos A y B tales que

$$\frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}.$$

Al reunir los términos del lado derecho,

$$x-1 = A(x+2) + Bx = (A+B)x + 2A.$$

Igualando coeficientes, $2A = -1$, luego $A = -\frac{1}{2}$; además $A+B = 1$, por lo que $B = \frac{3}{2}$. Integramos término a término:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left(-\frac{1}{2x} + \frac{3}{2(x+2)} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x+2} \\ &= \boxed{-\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x+2| + C}. \end{aligned}$$

Problema 4 · Rango de una matriz e inversa

La matriz del enunciado es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

a) Rango en función de m

Calculamos el determinante desarrollando por la segunda fila:

$$\begin{aligned}\det A &= m \begin{vmatrix} -1 & m \\ 2 & m^2 + 1 \end{vmatrix} \\ &= m(-(m^2 + 1) - 2m) \\ &= -m(m + 1)^2.\end{aligned}$$

Si $m \neq 0, -1$, el determinante no se anula y $\text{rg}(A) = 3$.

Si $m = 0$, la matriz queda

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El menor de las filas primera y tercera y columnas primera y tercera vale

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Luego $\text{rg}(A_0) \geq 2$. La fila segunda es nula, así que $\text{rg}(A_0) = 2$.

Si $m = -1$, resulta

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El menor de las dos primeras filas y columnas primera y segunda es

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A_{-1}) \geq 2$; como $\det A_{-1} = 0$, el rango es exactamente 2.

En conclusión,

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3, & m \neq 0, -1, \\ 2, & m = 0 \text{ o } m = -1. \end{cases}$$

b) Invertibilidad

Una matriz cuadrada es invertible exactamente cuando su determinante no es cero. Por tanto,

$$A \text{ es invertible si y solo si } m \neq 0, -1.$$

c) Resolver $XA = I$ para $m = 1$

Sustituimos $m = 1$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $\det A_1 = -1(1 + 1)^2 = -4 \neq 0$, A_1 es invertible. De $XA_1 = I$, multiplicando por A_1^{-1} a la derecha, se obtiene $X = A_1^{-1}$.

Calculamos la inversa por Gauss-Jordan, aplicando operaciones elementales a la matriz ampliada:

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow -F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{\substack{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 - 5F_2 \\ F_3 \leftarrow F_3/4}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 \leftarrow F_1 + 2F_2 \\ F_1 \leftarrow F_1 + F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right).\end{aligned}$$

Por tanto, la matriz de la derecha es A_1^{-1} , y la solución de la ecuación original es

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Problema 5 · Distancia, simétrico y plano paralelo

El punto y el plano son $P = (1, 2, 3)$ y $\pi : 3x + 2y + z + 4 = 0$. El vector normal del plano es $\mathbf{n} = (3, 2, 1)$.

a) Distancia de P a π

Para un plano $Ax + By + Cz + D = 0$, la distancia de (x_0, y_0, z_0) al plano es

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Sustituimos P y los coeficientes del plano:

$$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \boxed{\sqrt{14}}.$$

b) Punto simétrico respecto del plano

La recta perpendicular a π que pasa por P tiene dirección $\mathbf{n}$, así que en forma paramétrica es

$$r : x = 1 + 3t, y = 2 + 2t, z = 3 + t, t \in \mathbb{R}.$$

El pie de la perpendicular H se obtiene imponiendo que pertenezca al plano:

$$3(1 + 3t) + 2(2 + 2t) + (3 + t) + 4 = 0 \implies 14 + 14t = 0 \implies t = -1.$$

Sustituimos este valor en la recta:

$$H = (1 - 3, 2 - 2, 3 - 1) = (-2, 0, 2).$$

El punto simétrico P' tiene a H como punto medio del segmento PP' :

$$P' = 2H - P = 2(-2, 0, 2) - (1, 2, 3) = (-4, 0, 4) - (1, 2, 3) = \boxed{(-5, -2, 1)}.$$

c) Plano paralelo a π que pasa por P

Un plano paralelo conserva el mismo vector normal, por lo que tiene forma $3x + 2y + z + D = 0$. Al sustituir P :

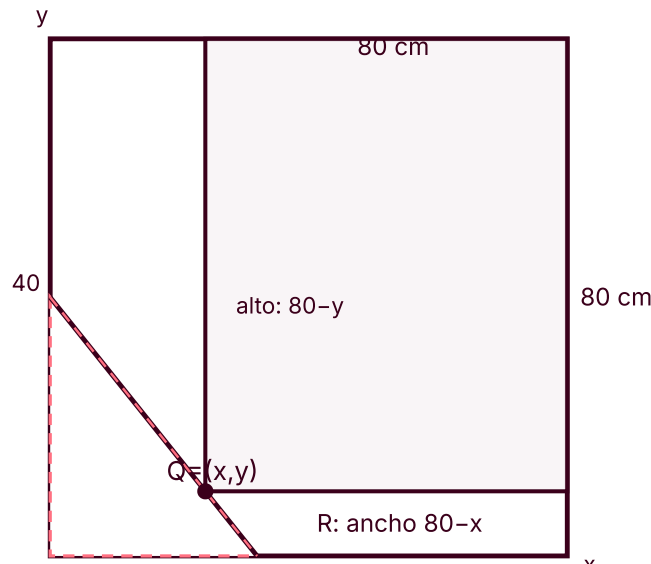
$$3(1) + 2(2) + 3 + D = 0 \implies D = -10.$$

El plano buscado es

$$\boxed{\pi' : 3x + 2y + z - 10 = 0}.$$

Problema 6 · Área máxima del rectángulo en el espejo

El cuadrado mide **80 cm** por lado. El corte recto une los puntos $(0, 40)$ y $(32, 0)$. El vértice $Q = (x, y)$ del rectángulo está en esa diagonal y los lados del rectángulo llegan a los bordes superior y derecho del espejo. Por tanto, sus dimensiones son $80 - x$ y $80 - y$.



a) Área en función de x

La recta de rotura pasa por $(0, 40)$ y $(32, 0)$. Su pendiente y ecuación son

$$m = \frac{0 - 40}{32 - 0} = -\frac{5}{4}, \quad y - 40 = -\frac{5}{4}(x - 0), \quad y = 40 - \frac{5}{4}x.$$

La anchura del rectángulo es $80 - x$; su altura es $80 - y$. Sustituimos la ecuación de la diagonal:

$$\begin{aligned} A(x) &= (80 - x)(80 - y) \\ &= (80 - x) \left(80 - \left(40 - \frac{5}{4}x \right) \right) \\ &= (80 - x) \left(40 + \frac{5}{4}x \right) \\ &= \boxed{3200 + 60x - \frac{5}{4}x^2 \text{ cm}^2}, \quad 0 \leq x \leq 32. \end{aligned}$$

b) Dimensiones que maximizan el área

Derivamos la función de área y buscamos sus puntos críticos:

$$A'(x) = 60 - \frac{5}{2}x, \quad A'(x) = 0 \implies x = 24.$$

El punto **24** pertenece al intervalo permitido $[0, 32]$. Comprobamos los signos de la derivada a ambos lados:

Intervalo **Valor de prueba** **$A'(x)$** **Signo** **Comportamiento**

$(0, 24)$ 12 30 + Crece

$(24, 32)$ 28 -10 - Decrece

La derivada cambia de positiva a negativa, así que en $x = 24$ hay un máximo. Además, $A''(x) = -\frac{5}{2} < 0$, lo que confirma que la parábola es cóncava hacia abajo. La coordenada vertical del vértice del rectángulo es

$$y = 40 - \frac{5}{4} \cdot 24 = 40 - 30 = 10.$$

Por tanto, la anchura es $80 - 24 = 56 \text{ cm}$ y la altura es $80 - 10 = 70 \text{ cm}$:

Dimensiones óptimas: $56 \text{ cm} \times 70 \text{ cm}$.

c) Área máxima

Sustituimos el valor crítico en la función de área:

$$A_{\max} = A(24) = (80 - 24)(80 - 10) = 56 \cdot 70 = \boxed{3920 \text{ cm}^2}.$$