

Julio de 2014 · Convocatoria extraordinaria

Resolvemos las dos opciones desde el enunciado. En cada apartado explicamos la idea, sustituimos los datos y comprobamos qué significa el resultado.

Opción A

Problema A1 · Determinantes, inversa y ecuación matricial

a) Determinante e inversa de S

La matriz del enunciado es

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Desarrollamos el determinante por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det(S) &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2(5 - 3) + 2(5 + 1) + (3 + 1) \\ &= 4 + 12 + 4 \\ &= \boxed{20}. \end{aligned}$$

Para calcular la inversa usamos

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \text{adj}(S),$$

donde $\text{adj}(S)$ es la traspuesta de la matriz de cofactores. Calculamos los cofactores:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 13 & 11 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{adj}(S) = C^T = \begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$S^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Una matriz cuadrada tiene inversa exactamente cuando su determinante no es cero. En este caso $\det(S) = 20 \neq 0$, así que S^{-1} existe. En general, si S^{-1} existe, entonces

$$\det(S) \det(S^{-1}) = \det(SS^{-1}) = \det(I) = 1,$$

lo que obliga a que $\det(S) \neq 0$. Y si $\det(S) \neq 0$, la fórmula de la adjunta permite construir S^{-1} .

b) Determinante de la inversa de $4T^2$

La matriz T es de orden 3 y $\det(T) = 20$. Como $\det(T) \neq 0$, la matriz $4T^2$ es invertible. Usamos las propiedades $\det(M^{-1}) = 1/\det(M)$, $\det(cT) = c^3 \det(T)$ para una matriz de orden 3 y $\det(T^2) = (\det T)^2$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\det((4T^2)^{-1}) &= \frac{1}{\det(4T^2)} \\ &= \frac{1}{4^3 \det(T^2)} \\ &= \frac{1}{64 \cdot 20^2} \\ &= \frac{1}{64 \cdot 400} \\ &= \boxed{\frac{1}{25600}}.\end{aligned}$$

c) Solución de la igualdad de matrices

Llamemos M a la primera matriz:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 - 1 & -3 \\ \alpha + 1 & 2 & \alpha^2 + 4 \\ -3 & 4\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

La segunda matriz del enunciado es la traspuesta de M :

$$M^T = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + 1 & -3 \\ \alpha^2 - 1 & 2 & 4\alpha \\ -3 & \alpha^2 + 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Igualemos las entradas que no coinciden automáticamente. De las posiciones $(1,2)$ y $(2,3)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha^2 - 1 &= \alpha + 1 & \implies (\alpha - 2)(\alpha + 1) &= 0 & \implies \alpha = 2 \text{ o } \alpha = -1, \\ \alpha^2 + 4 &= 4\alpha & \implies (\alpha - 2)^2 &= 0 & \implies \alpha = 2.\end{aligned}$$

La igualdad debe cumplirse en todas las entradas a la vez; el único valor común es

$$\boxed{\alpha = 2}.$$

Problema A2 · Planos, recta y distancia

Se dan $A = (1, 5, 7)$, $B = (3, -1, -1)$ y $C = (1, 0, 1)$.

Calculamos un vector director de la recta r que pasa por A y B :

$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2, -6, -8).$$

El punto medio de AB es

$$M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{5+(-1)}{2}, \frac{7+(-1)}{2} \right) = (2, 2, 3).$$

a) Ecuaciones generales de π_1 y π_2

Los dos planos son perpendiculares a r . Por tanto, un vector director de r es un vector normal a cada plano. Podemos simplificarlo a

$$\vec{n} = (1, -3, -4).$$

El plano π_1 pasa por A . Aplicamos la ecuación punto-normal:

$$\vec{n} \cdot ((x, y, z) - A) = 0.$$

Sustituimos $A = (1, 5, 7)$ y $\vec{n} = (1, -3, -4)$:

$$(x - 1) - 3(y - 5) - 4(z - 7) = 0 \implies \boxed{\pi_1 : x - 3y - 4z + 42 = 0}.$$

El plano π_2 pasa por el punto medio $M = (2, 2, 3)$ y tiene el mismo vector normal:

$$(x - 2) - 3(y - 2) - 4(z - 3) = 0 \implies \boxed{\pi_2 : x - 3y - 4z + 16 = 0}.$$

b) Distancia entre los planos

Los planos son paralelos porque tienen el mismo vector normal. Para dos planos paralelos

$$ax + by + cz + D_1 = 0, \quad ax + by + cz + D_2 = 0,$$

la distancia es

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Sustituimos los datos de π_1 y π_2 :

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|16 - 42|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-4)^2}} = \frac{26}{\sqrt{26}} = \boxed{\sqrt{26}}.$$

c) Recta r y puntos a distancia 3 de C

Usamos el punto A y el vector director $\overrightarrow{AB} = (2, -6, -8)$. La forma paramétrica de la recta es

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 5 - 6t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 7 - 8t, \end{cases}$$

Con $t = 0$ obtenemos A y con $t = 1$ obtenemos B .

Un punto cualquiera de r es $P(t) = (1 + 2t, 5 - 6t, 7 - 8t)$. Para que esté a distancia 3 de $C = (1, 0, 1)$, usamos la distancia euclídea:

$$\|P(t) - C\| = 3.$$

Al elevar al cuadrado y sustituir las coordenadas:

$$\begin{aligned} (2t)^2 + (5 - 6t)^2 + (6 - 8t)^2 &= 9, \\ 104t^2 - 156t + 61 &= 9, \\ 52(2t^2 - 3t + 1) &= 0, \\ (2t - 1)(t - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Así, $t = \frac{1}{2}$ o $t = 1$. Los puntos buscados son

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = (2, 2, 3), \quad P(1) = (3, -1, -1).$$

Ambos están a distancia 3 de C , por lo que la respuesta es

$$\boxed{(2, 2, 3) \text{ y } (3, -1, -1)}.$$

Problema A3 · Cortes, inflexión, crecimiento y área

La función es

$$f(x) = xe^x - 3x.$$

a) Puntos de corte con el eje X

Los puntos de corte cumplen $f(x) = 0$:

$$xe^x - 3x = 0 \iff x(e^x - 3) = 0.$$

Así, $x = 0$ o $e^x = 3$, es decir, $x = \ln 3$. Los puntos son

$$\boxed{(0, 0) \text{ y } (\ln 3, 0)}.$$

b) Punto de inflexión y crecimiento cuando $x > 2$

El dominio es $\mathbb{R}$: x es polinómica y e^x está definida para todo real. Derivamos:

$$f'(x) = (x + 1)e^x - 3, \quad f''(x) = (x + 2)e^x.$$

Como $e^x > 0$, $f''(x) = 0$ únicamente cuando $x = -2$. Además, $f''(x) < 0$ si $x < -2$ y $f''(x) > 0$ si $x > -2$; por tanto, la concavidad cambia y hay un punto de inflexión. Su ordenada es

$$f(-2) = (-2)e^{-2} - 3(-2) = 6 - \frac{2}{e^2}.$$

El punto de inflexión es

$$\left(-2, 6 - \frac{2}{e^2}\right).$$

Completamos el estudio de crecimiento y extremos. Los puntos críticos satisfacen

$$f'(x) = 0 \iff (x+1)e^x = 3.$$

Como $f''(x) < 0$ si $x < -2$, la derivada f' decrece en ese intervalo; además,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -3, \quad f'(-2) = -3 - e^{-2} < 0.$$

Por tanto, no hay ceros de f' a la izquierda de -2 . En $(-2, \infty)$, $f'' > 0$, así que f' crece estrictamente; como $f'(-2) < 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = +\infty$, existe un único punto crítico ξ . Numéricamente, $\xi \approx 0.617642$. Comprobamos el signo a ambos lados:

Intervalo	Valor de prueba	Derivada	Signo
$(-\infty, \xi)$	$x = 0$	$f'(0) = -2$	$-$
$(\xi, +\infty)$	$x = 1$	$f'(1) = 2e - 3 > 0$	$+$

Así, f decrece hasta ξ y crece después; en ξ tiene un mínimo (aproximadamente $f(\xi) \approx -0.707478$). En particular, para todo $x > 2$, $f'(x) > 0$ y la función es creciente, que es lo pedido en este apartado. En los dos extremos la función tiende a $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

Por tanto, el mínimo que alcanza en ξ es absoluto.

Comprobamos también las asíntotas. No hay asíntotas verticales porque el dominio es todo $\mathbb{R}$. En el extremo $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 3) = -3, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0,$$

de modo que hay una asíntota oblicua $y = -3x$. Cuando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$ y $f(x)/x = e^x - 3 \rightarrow +\infty$; por eso no hay asíntota horizontal ni oblicua en ese extremo.

c) Área entre la curva y el eje X en $[0, \ln 3]$

En $0 < x < \ln 3$, $x > 0$ y $e^x < 3$; por tanto, $f(x) = x(e^x - 3) < 0$. La curva está bajo el eje X , así que el área es el opuesto de la integral definida:

$$\mathcal{A} = - \int_0^{\ln 3} (xe^x - 3x) dx.$$

Calculamos la primitiva por partes en el término $\int xe^x dx$. Usamos $\int u dv = uv - \int v du$, con $u = x$, $du = dx$, $dv = e^x dx$ y $v = e^x$:

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x. \end{aligned}$$

También $\int 3x dx = \frac{3}{2}x^2$. Por tanto,

$$\int (xe^x - 3x) dx = (x - 1)e^x - \frac{3}{2}x^2 + C.$$

Evaluamos en los extremos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 3} (xe^x - 3x) dx &= \left[(x - 1)e^x - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{\ln 3} \\ &= \left(3 \ln 3 - 3 - \frac{3}{2}(\ln 3)^2 \right) - (-1) \\ &= 3 \ln 3 - 2 - \frac{3}{2}(\ln 3)^2. \end{aligned}$$

Este valor es negativo, como corresponde a una función situada bajo el eje X . El área es

$$\boxed{\mathcal{A} = 2 - 3 \ln 3 + \frac{3}{2}(\ln 3)^2}.$$

Opción B

Problema B1 · Discusión del sistema con parámetro

El sistema del enunciado es

$$\begin{cases} (1-\alpha)x + 2y + z = 4, \\ x + y - 2z = -4, \\ x + 4y - (\alpha+1)z = -2\alpha. \end{cases}$$

Su matriz de coeficientes y su matriz ampliada son

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -\alpha-1 \end{pmatrix}, \quad A_\alpha^* = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -\alpha-1 & -2\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Valores de α para los que el sistema es incompatible

Calculamos primero el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{aligned} \det(A_\alpha) &= (1-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -\alpha-1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -\alpha-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (1-\alpha)(7-\alpha) - 2(1-\alpha) + 3 \\ &= \alpha^2 - 6\alpha + 8 \\ &= (\alpha-2)(\alpha-4). \end{aligned}$$

Si $\det(A_\alpha) \neq 0$, el rango de A_α es 3 y, por contener tres filas, el de la ampliada también es 3. Por Rouché-Frobenius el sistema es compatible determinado. Hay que estudiar aparte los valores que anulan el determinante:

$$(\alpha-2)(\alpha-4) = 0 \implies \alpha = 2 \text{ o } \alpha = 4.$$

Para ambos valores, el menor de coeficientes formado por las dos últimas filas y las columnas x, y es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A_\alpha) = 2$. Revisamos ahora la ampliada mediante el menor de orden 3 de las columnas x, y y de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -2\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha)(16-2\alpha) - 2(4-2\alpha) + 12 = 2\alpha^2 - 14\alpha + 20 = 2(\alpha-2)(\alpha-5).$$

Para $\alpha = 4$, este menor vale $2(4-2)(4-5) = -4 \neq 0$. Así,

$$\text{rg}(A_4) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A_4^*),$$

y por Rouché-Frobenius el sistema es incompatible.

Para $\alpha = 2$, el menor ampliado calculado vale cero. Además, la tercera fila de la matriz ampliada es la primera más dos veces la segunda:

$$(1, 4, -3 \mid -4) = (-1, 2, 1 \mid 4) + 2(1, 1, -2 \mid -4).$$

Por tanto, $\text{rg}(A_2^*) \leq 2$. El menor de coeficientes de orden 2 que ya hemos calculado vale 3, así que ambos rangos son 2:

$$\text{rg}(A_2) = \text{rg}(A_2^*) = 2 < 3.$$

Por Rouché-Frobenius, para $\alpha = 2$ el sistema es compatible indeterminado, pues hay menos rango que incógnitas. En resumen:

$\alpha = 4$	: sistema incompatible,
$\alpha = 2$	: sistema compatible indeterminado,
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$	: sistema compatible determinado.

b) Valores de α para los que el sistema es compatible y determinado

Es el caso $\det(A_\alpha) \neq 0$, por tanto

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}.$$

c) Todas las soluciones cuando $\alpha = 2$

Sustituimos $\alpha = 2$:

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 4, \\ x + y - 2z = -4, \\ x + 4y - 3z = -4. \end{cases}$$

La tercera ecuación es la suma de la primera y el doble de la segunda, así que no añade una condición nueva. Despejamos x en la segunda y sustituimos en la primera:

$$x = -4 - y + 2z, \quad -(-4 - y + 2z) + 2y + z = 4 \implies 3y - z = 0.$$

Tomamos $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

$$y = \frac{\lambda}{3}, \quad x = -4 - \frac{\lambda}{3} + 2\lambda = \frac{-12 + 5\lambda}{3}.$$

La solución general es

$$(x, y, z) = \left(\frac{-12 + 5\lambda}{3}, \frac{\lambda}{3}, \lambda \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

El parámetro libre representa las infinitas soluciones, como confirma $\text{rg}(A_2) = \text{rg}(A_2^*) = 2 < 3$.

Problema B2 · Rectas, plano y distancia

Las rectas vienen dadas como intersecciones de planos:

$$r: \begin{cases} x - y = 0, \\ z = 10, \end{cases} \quad s: \begin{cases} x + y = 8, \\ x + y + z = 13. \end{cases}$$

a) Vectores directores y posición relativa

En r , las ecuaciones dan $y = x$ y $z = 10$. Tomando $x = t$, escribimos la recta en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = 10, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vec{u} = (1, 1, 0).$$

En s , al restar la primera ecuación de la segunda obtenemos $z = 5$. Tomando $x = q$, sale $y = 8 - q$:

$$s: \begin{cases} x = q, \\ y = 8 - q, \\ z = 5, \end{cases} \quad q \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = (1, -1, 0).$$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales, así que las rectas no son paralelas. Tampoco se cortan, porque todos los puntos de r tienen $z = 10$ y todos los de s tienen $z = 5$. Comprobamos que son alabeadas: tomamos $R = (0, 0, 10) \in r$, $S = (0, 8, 5) \in s$ y calculamos

$$\overrightarrow{RS} = (0, 8, -5), \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{RS} = (0, 0, -2) \cdot (0, 8, -5) = 10 \neq 0.$$

El producto mixto no nulo confirma que las rectas son alabeadas.

b) Plano que contiene s y es paralelo a r

El plano debe contener los dos vectores directores $\vec{v}$ y $\vec{u}$. Un vector normal es

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, -2) \sim (0, 0, 1).$$

Usamos el punto $S = (0, 8, 5)$ de s y aplicamos la ecuación punto-normal $\vec{n} \cdot ((x, y, z) - S) = 0$:

$$0(x - 0) + 0(y - 8) + (z - 5) = 0 \implies \boxed{\pi: z - 5 = 0}.$$

Contiene a s porque en s siempre $z = 5$, y es paralelo a r porque $\vec{u} = (1, 1, 0)$ es perpendicular a su normal.

c) Distancia entre r y s

Para dos rectas alabeadas usamos

$$d(r, s) = \frac{|\vec{RS} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

Con los puntos y directores anteriores:

$$d(r, s) = \frac{|(0, 8, -5) \cdot (0, 0, -2)|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{2} = \boxed{5}.$$

Problema B3 · Ingresos del viaje

Si viajan $60 + x$ personas, hay x pasajeros adicionales a los 60 que ya reservaron. Cada billete cuesta $800 - 10x$ euros. El total cobrado es el número de pasajeros multiplicado por el precio de cada billete.

a) Ingresos con 61, 70 y 80 pasajeros

- Con 61 pasajeros, $x = 1$: el billete cuesta $800 - 10(1) = 790$ euros y el ingreso es $61 \cdot 790 = \boxed{48\,190 \text{ euros}}$. - Con 70 pasajeros, $x = 10$: el billete cuesta $800 - 10(10) = 700$ euros y el ingreso es $70 \cdot 700 = \boxed{49\,000 \text{ euros}}$. - Con 80 pasajeros, $x = 20$: el billete cuesta $800 - 10(20) = 600$ euros y el ingreso es $80 \cdot 600 = \boxed{48\,000 \text{ euros}}$.

b) Ingreso en función del número adicional x

Multiplicamos pasajeros por precio:

$$\begin{aligned} R(x) &= (60 + x)(800 - 10x) \\ &= 48\,000 + 200x - 10x^2, \quad 0 \leq x \leq 20. \end{aligned}$$

Así, $R(x)$ se mide en euros y x en pasajeros adicionales.

c) Número de pasajeros que maximiza el ingreso

Buscamos el máximo de R en el intervalo cerrado $[0, 20]$. Derivamos e igualamos a cero:

$$R'(x) = 200 - 20x, \quad 200 - 20x = 0 \implies x = 10.$$

Para justificar el crecimiento y el decrecimiento, probamos un valor dentro de cada intervalo que separa el punto crítico $x = 10$:

Intervalo	Valor de prueba	$R'(x) = 200 - 20x$	Conclusión
$[0, 10)$	$x = 5$	$R'(5) = 100 > 0$	R crece
$\{10\}$	$x = 10$	$R'(10) = 0$	punto crítico
$(10, 20]$	$x = 15$	$R'(15) = -100 < 0$	R decrece

La derivada cambia de positiva a negativa en $x = 10$, así que allí se alcanza un máximo. Comprobamos también los extremos del intervalo para confirmar el valor máximo:

$$R(0) = 48\,000, \quad R(10) = 49\,000, \quad R(20) = 48\,000.$$

El máximo se alcanza con $x = 10$ pasajeros adicionales, es decir, con $60 + 10 = 70$ pasajeros. La empresa cobra entonces

$$\boxed{49\,000 \text{ euros}}.$$