

Junio de 2009 · Convocatoria ordinaria

Resolvemos cada apartado a partir de los datos del enunciado. En los cálculos indicamos la fórmula que usamos, sustituimos los datos y explicamos qué significa el resultado.

Bloque 1 · Álgebra

Problema 1.1 · Matrices

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, I = I_3.$$

a) Calcular y justificar la existencia de A^{-1}

Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante no es cero. Como A es triangular superior, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal:

$$\det A = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9 \neq 0.$$

Por tanto, A^{-1} existe. La calculamos reduciendo la matriz ampliada $(A | I)$ por filas:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1/3, F_2 \leftarrow F_2 - 2F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & | & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2/3, F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La parte izquierda ya es la identidad, así que la parte derecha es la inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Calcular $\det(3A^{-1})$

Para una matriz 3×3 , multiplicar todos sus elementos por un número k multiplica su determinante por k^3 . Además, $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. Por tanto:

$$\det(3A^{-1}) = 3^3 \det(A^{-1}) = 27 \cdot \frac{1}{9} = \boxed{3}.$$

c) Hallar x, y, z si $xI + yA + zA^2 = B$

Primero calculamos la potencia que aparece en la ecuación. Multiplicamos A por sí misma:

$$A^2 = A A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora sustituimos I , A , A^2 y B en la igualdad matricial:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Igualamos entradas correspondientes. Las posiciones $(1,3)$, $(1,2)$ y $(1,1)$ dan un sistema triangular y determinan z, y, x , en ese orden:

$$12z = 12 \Rightarrow z = 1, \quad 6y + 36z = 48 \Rightarrow y = 2, \quad x + 3y + 9z = 18 \Rightarrow x = 3.$$

Comprobamos la igualdad calculando cada producto por separado:

$$xI = 3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, yA = 2A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, zA^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al sumar las tres matrices, entrada a entrada, recuperamos la matriz B :

$$xI + yA + zA^2 = \begin{pmatrix} 3+6+9 & 0+12+36 & 0+0+12 \\ 0+0+0 & 3+6+9 & 0+4+8 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 3+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = B.$$

Problema 1.2 · Discusión de un sistema con parámetro

$$\begin{cases} (\alpha + 3)x - 4y - 2z = 4, \\ x - 2y - (\alpha + 2)z = 2, \\ 2x + (\alpha - 3)y - 2z = 4. \end{cases}$$

Llamamos A_α a la matriz de coeficientes y A_α^* a la ampliada:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha + 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -(\alpha + 2) \\ 2 & \alpha - 3 & -2 \end{pmatrix}, A_\alpha^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha + 3 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -(\alpha + 2) & 2 \\ 2 & \alpha - 3 & -2 & 4 \end{array} \right).$$

El teorema de Rouché–Frobenius dice que el sistema es compatible si $\text{rg}(A_\alpha) = \text{rg}(A_\alpha^*)$. Si ese rango común es 3, hay solución única; si es menor que 3, quedan variables libres.

Calculamos primero el determinante de la matriz de coeficientes, desarrollando por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A_\alpha &= (\alpha + 3)(4 + (\alpha + 2)(\alpha - 3)) + 4(-2 + 2(\alpha + 2)) - 2((\alpha - 3) + 4) \\ &= (\alpha + 3)(\alpha - 2)(\alpha + 1) + 8(\alpha + 1) - 2(\alpha + 1) \\ &= \alpha(\alpha + 1)^2. \end{aligned}$$

Así, el determinante se anula solo si $\alpha = 0$ o $\alpha = -1$.

a) Clasificar el sistema cuando $\alpha = 0$

Sustituimos $\alpha = 0$:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}, A_0^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 \end{array} \right).$$

Como $\det A_0 = 0$, el rango de A_0 es menor que 3. El menor de orden 2 formado por las dos primeras filas y columnas vale

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2 \neq 0,$$

de modo que $\text{rg}(A_0) = 2$. Para la matriz ampliada, tomamos las columnas 1, 2 y la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 3(-8 + 6) + 4(4 - 4) + 4(-3 + 4) = -2 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(A_0^*) = 3$. Los rangos son distintos, $2 \neq 3$, así que por Rouché–Frobenius el sistema es **incompatible** y no tiene solución.

b) Valores de α para los que hay solución única

Si $\alpha \neq 0, -1$, el determinante calculado es distinto de cero:

$$\det A_\alpha = \alpha(\alpha + 1)^2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A_\alpha) = 3.$$

La matriz ampliada tiene tres filas, por lo que su rango no puede superar 3; como contiene a A_α , también tiene rango 3. En consecuencia,

El sistema es compatible determinado para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

c) Resolver el sistema cuando es compatible indeterminado

El único otro valor singular que falta estudiar es $\alpha = -1$. Al sustituirlo:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, A_{-1}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \end{array} \right).$$

La primera y la tercera filas son el doble de la segunda, tanto en la matriz de coeficientes como en la ampliada. Cada matriz tiene una fila independiente. También lo certifica el menor de orden 1 formado por la entrada 1, que es no nulo; los menores de orden 2 son cero porque las filas son proporcionales. Por ello,

$$\text{rg}(A_{-1}) = \text{rg}(A_{-1}^*) = 1 < 3.$$

El sistema es compatible indeterminado. Basta resolver una ecuación independiente, por ejemplo la segunda:

$$x - 2y - z = 2 \Rightarrow x = 2 + 2y + z.$$

Tomando $y = s$ y $z = t$ como parámetros reales, obtenemos

$$(x, y, z) = (2 + 2s + t, s, t), s, t \in \mathbb{R}.$$

Bloque 2 · Geometría

Problema 2.1 · Triángulo determinado por un plano

El plano es $x + 4y - 2z - 4 = 0$. Para hallar cada corte con un eje, ponemos a cero las otras dos coordenadas:

Eje	Sustitución en el plano	Punto de corte
OX	$y = z = 0 : x - 4 = 0$	$A = (4, 0, 0)$
OY	$x = z = 0 : 4y - 4 = 0$	$B = (0, 1, 0)$
OZ	$x = y = 0 : -2z - 4 = 0$	$C = (0, 0, -2)$

a) Área del triángulo

El área de un triángulo con lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es la mitad del módulo de su producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4, 1, 0), \overrightarrow{AC} = C - A = (-4, 0, -2).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, -8, 4), \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

Por tanto,

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}(2\sqrt{21}) = \sqrt{21} \text{ u}^2.$$

b) Perímetro

Usamos la distancia entre dos puntos, que se obtiene con el módulo del vector que los une:

$$|AB| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}, |AC| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}, |BC| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Sumamos los tres lados:

$$P = |AB| + |AC| + |BC| = \sqrt{17} + 3\sqrt{5} \text{ u}.$$

c) Ángulos interiores

Para dos vectores no nulos u, v , $\cos \theta = (u \cdot v) / (|u||v|)$. En cada vértice usamos los dos lados que parten de ese vértice:

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{16}{\sqrt{17}2\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{85}}, \\ \cos B &= \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|} = \frac{1}{\sqrt{17}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{85}}, \\ \cos C &= \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}||\vec{CB}|} = \frac{4}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Así, los ángulos exactos son

$$A = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{85}}\right), B = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{85}}\right), C = \arccos\left(\frac{2}{5}\right).$$

En grados, sus aproximaciones son $A \approx 29,81^\circ$, $B \approx 83,77^\circ$ y $C \approx 66,42^\circ$; suman 180° , como deben hacerlo los ángulos interiores de un triángulo.

Problema 2.2 · Recta y plano

a) Recta por $A = (4, 4, 0)$ perpendicular al plano $z = 0$

El vector normal del plano $z = 0$ es $(0, 0, 1)$, y por tanto es un vector director de cualquier recta perpendicular a ese plano. La forma paramétrica de una recta que pasa por (x_0, y_0, z_0) con vector director (a, b, c) es $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$. Sustituimos los datos:

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = 4, t \in \mathbb{R}. \\ z = t, \end{cases}$$

b) Plano por $P = (0, 0, 12)$, perpendicular a la recta OQ

La recta de datos se expresa en forma paramétrica como $x = 4$, $y = 4$, $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$. Por tanto, $Q = (4, 4, q)$.

Un vector director de OQ es $\vec{OQ} = (4, 4, q)$. Si el plano buscado es perpendicular a esa recta, $\vec{OQ}$ es un vector normal del plano; además, el plano debe contener a P y a Q . La condición de incidencia de Q en ese plano es

$$\vec{OQ} \cdot \vec{PQ} = 0, \vec{PQ} = Q - P = (4, 4, q - 12).$$

$$(4, 4, q) \cdot (4, 4, q - 12) = 16 + 16 + q(q - 12) = 0 \Rightarrow q^2 - 12q + 32 = 0 \Rightarrow (q - 4)(q - 8) = 0.$$

Se obtienen $q = 4$ o $q = 8$. La ecuación general de un plano con normal (a, b, c) que pasa por (x_0, y_0, z_0) es $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Para cada punto Q :

$$q = 4 : 4x + 4y + 4(z - 12) = 0 \Rightarrow \boxed{x + y + z - 12 = 0};$$

$$q = 8 : 4x + 4y + 8(z - 12) = 0 \Rightarrow \boxed{x + y + 2z - 24 = 0}.$$

Ambos planos cumplen las condiciones del enunciado.

Bloque 3 · Análisis

Problema 3.1 · Dominio, monotonía, fracciones simples y área

$$f(x) = \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{9-x^2}.$$

a) Dominio, crecimiento y decrecimiento

El dominio de una función racional excluye los valores que anulan su denominador. Resolvemos:

$$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3 \text{ o } x = 3.$$

Por tanto, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Derivamos usando la regla de la cadena:

$$f'(x) = -(9 - x^2)^{-2}(-2x) = \frac{2x}{(9 - x^2)^2}.$$

El denominador de f' es positivo siempre que esté definido; su signo depende del numerador $2x$, que se anula en $x = 0$. Los puntos -3 y 3 no pertenecen al dominio. Comprobamos el signo con un valor de prueba en cada intervalo:

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$2x$	-8	no definido	-2	0	2	no definido	8
$\text{sgn}(f')$	$-$	no definida	$-$	0	$+$	no definida	$+$
Comportamiento	decrece	no hay extremo	decrece	mínimo	crece	no hay extremo	crece

Así, f decrece en $(-\infty, -3)$ y $(-3, 0)$, y crece en $(0, 3)$ y $(3, +\infty)$. Los puntos $x = \pm 3$ no pertenecen al dominio, por lo que no son máximos ni mínimos. En $x = 0$, la derivada cambia de negativa a positiva, de modo que hay un mínimo relativo:

$$f(0) = \frac{1}{9} \Rightarrow \text{mínimo relativo} \left(0, \frac{1}{9}\right).$$

Comprobamos todas las asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty.$$

Luego hay asíntotas verticales $x = -3$ y $x = 3$. Para $x \rightarrow \pm\infty$, el denominador crece como $-x^2$, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Hay una asíntota horizontal $y = 0$. Para comprobar una posible asíntota oblicua $y = mx + n$, calculamos $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = 0$ y después $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = 0$. El resultado es la horizontal $y = 0$, no una oblicua distinta.

b) Descomposición en fracciones simples

Buscamos constantes A, B tales que

$$\frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x}.$$

Multiplicamos por $(3-x)(3+x)$ y comparamos valores que simplifican la igualdad:

$$1 = A(3+x) + B(3-x).$$

Con $x = 3$, $1 = 6A$, así que $A = 1/6$. Con $x = -3$, $1 = 6B$, así que $B = 1/6$. Por tanto,

$$\frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{6(3-x)} + \frac{1}{6(3+x)}.$$

c) Área entre la curva y el eje OX , de $x = -2$ a $x = 2$

En ese intervalo, $9 - x^2 > 0$, así que $f(x) > 0$ y el área es la integral de la función. Usamos la descomposición anterior y la regla $\int (3-x)^{-1} dx = -\ln|3-x|$:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \frac{dx}{9-x^2} = \frac{1}{6} \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{3-x} + \frac{1}{3+x} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6} \ln|3+x| - \frac{1}{6} \ln|3-x| \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{1}{6} (\ln 5 - \ln 1) - \frac{1}{6} (\ln 1 - \ln 5) = \frac{1}{3} \ln 5 \text{ u}^2. \end{aligned}$$

Problema 3.2 · Simetría, integral e inflexión

$$f(x) = e^x - e^{-x}.$$

El dominio es $\mathbb{R}$, porque las dos exponenciales están definidas para todo real. Como f es continua en todo $\mathbb{R}$, no tiene asíntotas verticales. Además, $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$, por lo que no hay horizontales. Para una posible oblicua, $f(x)/x$ no tiene límite finito en ninguno de los dos extremos (la exponencial crece más rápido que $|x|$); tampoco existen asíntotas oblicuas.

También podemos describir su crecimiento: $f'(x) = e^x + e^{-x} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, $f'(0) = 2 > 0$; el signo no cambia en ningún intervalo y f' nunca se anula. Así, f crece estrictamente en todo $\mathbb{R}$ y no tiene máximos ni

a) Calcular $f(x) + f(-x)$

Sustituimos $-x$ en la expresión de la función:

$$f(-x) = e^{-x} - e^x = -f(x) \Rightarrow \boxed{f(x) + f(-x) = 0}.$$

La función es impar: sus valores en puntos opuestos tienen signos contrarios.

b) Calcular $\int_{-a}^a f(x) dx$, con $a > 0$

Una primitiva se obtiene integrando cada término: $\int e^x dx = e^x$ y $\int -e^{-x} dx = e^{-x}$. Por tanto, una primitiva es $F(x) = e^x + e^{-x} + C$. Evaluamos en los extremos:

$$\int_{-a}^a (e^x - e^{-x}) dx = [e^x + e^{-x}]_{-a}^a = (e^a + e^{-a}) - (e^{-a} + e^a) = \boxed{0}.$$

c) Hallar el punto de inflexión

Derivamos dos veces:

$$f'(x) = e^x + e^{-x}, \quad f''(x) = e^x - e^{-x}.$$

Resolvemos $f''(x) = 0$:

$$e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0.$$

Si $x < 0$, por ejemplo $x = -1$, $f''(-1) = e^{-1} - e < 0$; si $x > 0$, por ejemplo $x = 1$, $f''(1) = e - e^{-1} > 0$. La segunda derivada cambia de signo, así que hay inflexión en $x = 0$. Como $f(0) = 0$, el punto es

$$\boxed{(0, 0)}.$$

Bloque 4 · Resolución de problemas

Problema 4.1 · Minimizar el coste de una bodega

Sea $x > 0$ la anchura de la base. El largo mide $3x/4$, la altura es h , y el volumen es 100 m^3 . Como el volumen de un paralelepípedo es largo por ancho por alto,

$$\frac{3}{4}x \cdot x \cdot h = 100 \Rightarrow h = \frac{400}{3x^2}.$$

a) Anchura que minimiza el coste

Sumamos por separado suelo, techo y paredes. El área del suelo y del techo es $(3/4)x^2$ en cada caso. El área total de las cuatro paredes es $2xh + 2(3x/4)h = (7/2)xh$. Aplicando precio por metro cuadrado:

$$\begin{aligned} C(x, h) &= 225 \left(\frac{3}{4}x^2 \right) + 300 \left(\frac{3}{4}x^2 \right) + 256 \left(2xh + 2 \frac{3}{4}xh \right) \\ &= \frac{1575}{4}x^2 + 896xh. \end{aligned}$$

Sustituimos $h = 400/(3x^2)$ para expresar el coste solo en función de x :

$$C(x) = \frac{1575}{4}x^2 + 896x \frac{400}{3x^2} = \frac{1575}{4}x^2 + \frac{358400}{3x}, \quad x > 0.$$

Derivamos y buscamos los puntos críticos:

$$C'(x) = \frac{1575}{2}x - \frac{358400}{3x^2} = \frac{175(3x - 16)(9x^2 + 48x + 256)}{6x^2}.$$

Para $x > 0$, el denominador y el factor cuadrático son positivos; este último tiene discriminante $48^2 - 4 \cdot 9 \cdot 256 = -6912 < 0$. El signo de C' lo determina $3x - 16$, que se anula en:

$$x = \frac{16}{3} \text{ m.}$$

Para comprobar el cambio de comportamiento, probamos un valor a cada lado:

x	1	16/3	6
$C'(x)$	$-712075/6 < 0$	0	$37975/27 > 0$
Signo	-	0	+

El coste decrece antes de $16/3$ y crece después. Como $C(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$ y cuando $x \rightarrow +\infty$, el mínimo es absoluto. La anchura óptima es $16/3 \text{ m}$; la longitud es 4 m y la altura $75/16 \text{ m}$.

b) Coste mínimo

Sustituimos la anchura óptima en las dos partes de la función de coste:

$$\begin{aligned} C\left(\frac{16}{3}\right) &= \frac{1575}{4} \left(\frac{16}{3}\right)^2 + \frac{358400}{3\left(\frac{16}{3}\right)} \\ &= 11200 + 22400 = 33600 \text{ €}. \end{aligned}$$

Problema 4.2 · Maximizar el beneficio en rebajas

El precio de compra es 300 euros por unidad. El precio inicial al público incluye un incremento del 40 %:

$$300 + 0,40(300) = 420 \text{ € por unidad.}$$

Si aplicamos n descuentos, con n entero no negativo, el precio será $420 - 3n$ y se venderán $50 + 5n$ unidades. Para que el margen sea positivo, $420 - 3n > 300$, luego $0 \leq n \leq 39$:

$$420 - 3n > 300 \Rightarrow n < 40.$$

El beneficio es margen por unidad multiplicado por el número de unidades:

$$\begin{aligned} P(n) &= (420 - 3n - 300)(50 + 5n) \\ &= (120 - 3n)(50 + 5n) \\ &= -15n^2 + 450n + 6000. \end{aligned}$$

La parábola es cóncava. Igualamos la derivada a cero para localizar el máximo:

$$P'(n) = -30n + 450 = 0 \Rightarrow n = 15.$$

Comprobamos el signo de la derivada a ambos lados del punto crítico:

n	10	15	20
$P'(n)$	150	0	-150
Signo	+	0	-

Por tanto, P crece hasta $n = 15$ y decrece después. Como 15 es un entero admisible del dominio $0 \leq n \leq 39$, allí se alcanza el máximo:

$$\text{unidades} = 50 + 5(15) = 125, \text{ precio} = 420 - 3(15) = 375 \text{ € por unidad}.$$

El beneficio máximo es $(375 - 300) \cdot 125 = 9375$ euros.