

Septiembre de 2008 - Convocatoria extraordinaria

El examen permite elegir tres de los cuatro bloques. Aquí se resuelven los ocho problemas para que queden explicados todos los apartados.

Bloque 1 - Álgebra lineal - Problema 1.1

La matriz y el vector incógnita son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Resolver $AX = 0X$

Multiplicar una matriz por el vector nulo da el vector nulo. Calculamos

$$AX = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0, \\ 2x + 4y = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación, $x = y$. Al sustituir en la segunda, $2x + 4x = 6x = 0$, así que $x = 0$ e $y = 0$. Por tanto,

$$X = (0, 0).$$

También se comprueba que $\det A = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 6 \neq 0$; por ello, el núcleo contiene únicamente el vector nulo.

b) Resolver $AX = 3X$

Pasamos todo al lado izquierdo y calculamos el núcleo de $A - 3I$:

$$(A - 3I)X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La primera fila da $-2x - y = 0$, es decir, $y = -2x$; la segunda fila es la misma ecuación multiplicada por -1 . Si $x = t$, con $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$X = (t, -2t), t \in \mathbb{R}.$$

c) Resolver $AX = 2X$

Ahora usamos $A - 2I$:

$$(A - 2I)X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las dos filas equivalen a $x + y = 0$. Tomando $x = t$, resulta

$$X = (t, -t), t \in \mathbb{R}.$$

Bloque 1 - Álgebra lineal - Problema 1.2

El sistema y su matriz de coeficientes son

$$\begin{cases} x + y + z = \alpha + 3, \\ 2x - y + z = \alpha + 1, \\ 3x + \alpha y + 2z = 4, \end{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinante y clasificación por Rouché-Frobenius

Para una matriz cuadrada, un determinante no nulo implica rango máximo y solución única. Simplificamos el determinante con la operación $F_3 \leftarrow F_3 - F_1 - F_2$, que no lo cambia:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \end{vmatrix} = \alpha.$$

Si $\alpha \neq 0$, entonces $\det A \neq 0$, por lo que $\text{rg}(A) = 3$. Como A está contenida en la ampliada A^* , también $\text{rg}(A^*) = 3$. Por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado (SCD).

Para hallar su solución, restamos la primera y la segunda ecuación de la tercera:

$$\alpha y = 4 - (\alpha + 3) - (\alpha + 1) = -2\alpha.$$

Al ser $\alpha \neq 0$, dividimos entre α y obtenemos $y = -2$. Sustituimos:

$$\begin{aligned}x + z &= \alpha + 5, \\2x + z &= \alpha - 1.\end{aligned}$$

La segunda igualdad menos la primera da $x = -6$; entonces $z = \alpha + 11$. Así,

$$(x, y, z) = (-6, -2, \alpha + 11) \quad (\alpha \neq 0).$$

Si $\alpha = 0$, la tercera ecuación es la suma de las dos primeras, también en sus términos independientes:

$$(3, 0, 2 \mid 4) = (1, 1, 1 \mid 3) + (2, -1, 1 \mid 1).$$

Por tanto, $\text{rg}(A) \leq 2$ y $\text{rg}(A^*) \leq 2$. El menor de orden 2 formado por las dos primeras filas y columnas de A vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0.$$

Luego $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$. Por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado (SCI).

a) Compatibilidad para todo α

Si $\alpha \neq 0$, acabamos de comprobar que es SCD; si $\alpha = 0$, es SCI. En ambos casos los rangos coinciden, así que el sistema es compatible para todo α .

b) Valor de α para que sea indeterminado

El único caso con rango menor que el número de incógnitas es $\alpha = 0$. Por tanto,

$$\alpha = 0.$$

c) Solución cuando $\alpha = 0$

Restamos la primera ecuación de la segunda:

$$(2x - y + z) - (x + y + z) = 1 - 3 \implies x - 2y = -2.$$

Tomamos $y = t$, con $t \in \mathbb{R}$. Entonces $x = 2t - 2$, y la primera ecuación da

$$z = 3 - x - y = 3 - (2t - 2) - t = 5 - 3t.$$

La familia de soluciones es

$$(x, y, z) = (2t - 2, t, 5 - 3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bloque 2 - Geometría - Problema 2.1

Escribimos los planos en forma general y anotamos sus vectores normales:

$$\pi_1 : x + y + z - 3 = 0, \quad n_1 = (1, 1, 1); \quad \pi_2 : x + y - \alpha z = 0, \quad n_2 = (1, 1, -\alpha).$$

a) Perpendicularidad e intersección

Dos planos son perpendiculares cuando sus normales son ortogonales:

$$n_1 \cdot n_2 = 1 + 1 - \alpha = 0 \implies \alpha = 2.$$

Para este valor, resolvemos conjuntamente $x + y + z = 3$ y $x + y - 2z = 0$. Al restar la segunda igualdad de la primera resulta $3z = 3$, luego $z = 1$; sustituyendo, $x + y = 2$. Tomando $x = 2 + t$, se obtiene $y = -t$. La recta de intersección, en forma paramétrica, es

$$x = 2 + t, \quad y = -t, \quad z = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Paralelismo y distancia

Los planos son paralelos si sus normales son proporcionales. Las dos primeras componentes fuerzan el factor de proporcionalidad 1, así que $-\alpha = 1$ y

$$\alpha = -1.$$

En este caso los planos son $x + y + z = 3$ y $x + y + z = 0$. La distancia entre planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ y $ax + by + cz + d_2 = 0$ es

$$d = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-3 - 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \boxed{\sqrt{3}}.$$

Bloque 2 - Geometría - Problema 2.2

El plano es $\pi : x + y + z - 6 = 0$, cuyo vector normal es $n = (1, 1, 1)$.

a) Recta por O perpendicular al plano

La dirección de una recta perpendicular al plano es su normal. Como la recta pasa por $O = (0, 0, 0)$, su forma paramétrica es

$$\boxed{x = t, y = t, z = t, t \in \mathbb{R}}.$$

b) Simétrico del origen

El pie H de la perpendicular está en la recta anterior. Escribimos $H = (t, t, t)$ y lo sustituimos en el plano:

$$3t = 6 \implies t = 2, H = (2, 2, 2).$$

El punto O' simétrico de O tiene a H como punto medio de OO' , de modo que

$$O' = 2H - O = (4, 4, 4).$$

Por tanto,

$$\boxed{O' = (4, 4, 4)}.$$

c) Plano que contiene el eje X y la recta

Las dos direcciones del plano son la del eje X , $u = (1, 0, 0)$, y la de la recta, $v = (1, 1, 1)$. Un vector normal es

$$u \times v = (0, -1, 1).$$

El plano pasa por el origen. Su ecuación general es

$$0x - y + z = 0 \implies \boxed{y - z = 0}.$$

Bloque 3 - Análisis - Problema 3.1

Se tiene $f(t) = at + b$ y

$$F(x) = x \int_1^{x+1} (at + b) dt.$$

a) Calcular la integral

Llamamos $I(x)$ a la integral que aparece en la definición de F . Una primitiva de $at + b$, respecto de t , es $\frac{a}{2}t^2 + bt$. Evaluamos en los extremos:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_1^{x+1} (at + b) dt \\ &= \left[\frac{a}{2}t^2 + bt \right]_1^{x+1} \\ &= \frac{a}{2}((x+1)^2 - 1) + b((x+1) - 1) \\ &= \frac{a}{2}x^2 + (a+b)x. \end{aligned}$$

Por tanto, $F(x) = xI(x) = \frac{a}{2}x^3 + (a+b)x^2$. El dominio es $\mathbb{R}$, porque el extremo superior $x+1$ puede ser cualquier real y el integrando es un polinomio continuo.

Comprobamos las asíntotas de F . Al ser un polinomio, está definido y es continuo en todo $\mathbb{R}$, así que no tiene asíntotas verticales. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, F tiene grado 2 o 3 y su valor no tiende a un número finito cuando $x \rightarrow \pm\infty$; tampoco puede aproximarse a una recta, porque el término cuadrático o cúbico no desaparece. Por tanto, no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas. Si $a = b = 0$, $F(x) = 0$ y la recta horizontal $y = 0$ coincide con la gráfica.

b) Derivada de F

Aplicamos la regla del producto a $F(x) = xI(x)$. Por el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena,

$$F'(x) = I(x) + xI'(x), \quad I'(x) = f(x+1) \cdot \frac{d}{dx}(x+1) = a(x+1) + b.$$

Sustituimos $I(x)$ y agrupamos términos:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{a}{2}x^2 + (a+b)x + x(a(x+1) + b) \\ &= \boxed{\frac{3a}{2}x^2 + 2(a+b)x}. \end{aligned}$$

c) Condición $F''(0) = 0$

Derivamos F' y evaluamos en cero:

$$F''(x) = 3ax + 2(a+b), \quad F''(0) = 2(a+b).$$

La condición pedida da

$$2(a+b) = 0 \implies \boxed{a+b=0 \text{ (es decir, } a=-b\text{)}}.$$

Bloque 3 - Análisis - Problema 3.2

Para $\alpha > 0$, la curva es $g(x) = x^2 + \alpha$. En el intervalo $0 \leq x \leq \sqrt{6}$, está por encima del eje X , ya que $x^2 + \alpha > 0$. El dominio de g es $\mathbb{R}$, porque es un polinomio. Revisamos sus asíntotas: no hay verticales, pues g es continua en todo real. Además, $g(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, así que no hay horizontales. Para una posible oblicua, el cociente $g(x)/x = x + \alpha/x$ no tiene límite finito cuando $x \rightarrow \pm\infty$; por tanto, tampoco existe asíntota oblicua.

a) Área de la región

El área limitada por los ejes, la recta $x = \sqrt{6}$ y la curva se calcula integrando la altura $g(x)$:

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \int_0^{\sqrt{6}} (x^2 + \alpha) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \alpha x \right]_0^{\sqrt{6}} \\ &= \frac{(\sqrt{6})^3}{3} + \alpha\sqrt{6} = \boxed{\sqrt{6}(\alpha + 2)}. \end{aligned}$$

b) Dos regiones de igual área

El rectángulo tiene base $\sqrt{6}$ y altura $6 + \alpha$; su área total es

$$S_{\text{rect}} = \sqrt{6}(6 + \alpha).$$

La curva divide el rectángulo en dos regiones iguales cuando el área bajo ella es la mitad del área total:

$$\begin{aligned} \sqrt{6}(\alpha + 2) &= \frac{1}{2} \sqrt{6}(6 + \alpha), \\ 2\alpha + 4 &= \alpha + 6, \\ \alpha &= 2. \end{aligned}$$

Como $2 > 0$, el valor cumple la condición del enunciado:

$$\boxed{\alpha = 2}.$$

Bloque 4 - Resolución de problemas - Problema 4.1

El móvil parte de $M_0 = (1, 0)$, se mantiene en la recta vertical $x = 1$ y se mueve en el primer cuadrante con rapidez constante $v = 2 \text{ m/s}$. En un movimiento rectilíneo uniforme, el desplazamiento es $s = vt$. Como x no cambia y el movimiento es hacia arriba,

$$x(t) = 1, \quad y(t) = 0 + (2 \text{ m/s})t.$$

Si t se mide en segundos y las coordenadas en metros,

$$\boxed{M(t) = (1, 2t), \quad t \geq 0}.$$

La velocidad por componentes es $M'(t) = (0, 2) \text{ m/s}$; su módulo es

$$\|M'(t)\| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \text{ m/s},$$

que coincide con la rapidez indicada.

Pendiente $m(t)$ y su derivada

La pendiente de la recta que une $O = (0, 0)$ con $M(t)$ es el cambio vertical dividido por el cambio horizontal:

$$m(t) = \frac{2t - 0}{1 - 0} = 2t.$$

Derivamos respecto del tiempo:

$$\boxed{m'(t) = 2 \text{ s}^{-1}}.$$

Bloque 4 - Resolución de problemas - Problema 4.2

El diámetro del semicírculo es horizontal y su centro es el punto medio. Sea x la distancia entre los dos vértices del rectángulo situados sobre ese diámetro; por tanto, x es la anchura de la base. La mitad de esa anchura es $x/2$.

El radio mide $R = \sqrt{50} \text{ m}$. Si h es la altura, cada vértice superior está sobre la circunferencia, así que el teorema de Pitágoras da

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 = 50 \implies h = \sqrt{50 - \frac{x^2}{4}} \text{ m}.$$

La base no puede superar el diámetro; el dominio es

$$0 \leq x \leq 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2}.$$

a) Área en función de x

El área del rectángulo es base por altura:

$$A(x) = x \sqrt{50 - \frac{x^2}{4}} \text{ m}^2.$$

b) Anchura que maximiza el área

Buscamos los puntos críticos de A en el interior del dominio:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \sqrt{50 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{50 - \frac{x^2}{4}}} \\ &= \frac{100 - x^2}{2\sqrt{50 - \frac{x^2}{4}}}. \end{aligned}$$

En el interior, el denominador es positivo. Entonces

$$A'(x) = 0 \iff 100 - x^2 = 0 \iff x = \pm 10.$$

Como $x \geq 0$, solo $x = 10$ pertenece al dominio. Comprobamos los signos con un valor a cada lado, ambos admisibles:

$$A'(5) = \frac{75}{2\sqrt{175/4}} > 0, \quad A'(12) = \frac{-44}{2\sqrt{14}} < 0.$$

Por tanto, el área crece antes de **10** y decrece después:

x	$(0, 10)$	10	$(10, 10\sqrt{2})$
$A'(x)$	+	0	-

En los extremos, $A(0) = A(10\sqrt{2}) = 0$, mientras que

$$A(10) = 10\sqrt{50 - 25} = 50 \text{ m}^2.$$

Así, la anchura que produce el área máxima es **10 m**, la altura es **5 m** y el área máxima vale

$$A_{\max} = 50 \text{ m}^2.$$