

PAU Madrid - Matemáticas II

Modelo orientativo de 2022

Se desarrollan las ocho preguntas del modelo.

Pregunta A.1 - Matrícula en idiomas

Sean i, f, a los números de alumnos matriculados en inglés, francés y alemán, y T el total. Como cada alumno estudia un único idioma,

$$i + f + a = T, \quad i = 0,6T.$$

Si diez alumnos de francés se matriculasen en alemán, las cantidades se igualarían:

$$f - 10 = a + 10 \implies f - a = 20.$$

La cuarta parte de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre francés y alemán:

$$\frac{i}{4} = 2(f - a) + 8 = 2 \cdot 20 + 8 = 48.$$

Así, $i = 192$ y $T = \frac{192}{0,6} = 320$. Por tanto, $f + a = 128$. Junto con $f - a = 20$,

$$f = 74, \quad a = 54.$$

Conclusión. Hay 192 alumnos de inglés, 74 de francés y 54 de alemán.

Pregunta A.2 - Continuidad, extremos e integral

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ xe^{4-x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

El primer tramo está definido para $x < 0$ y el segundo para $x \geq 0$; entre ambos cubren todos los reales, así que el dominio es $\mathbb{R}$.

a) Continuidad y derivabilidad en $x = 0$

En el tramo izquierdo, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$, así que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 - 1 = 0.$$

Por la segunda expresión, $f(0) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{4-x^2} = 0$. Los límites laterales coinciden con el valor de la función, por lo que f es continua en 0.

Para la derivada por la izquierda usamos el cociente incremental:

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - \frac{\sin h}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h - \sin h}{h^2} = 0.$$

La última igualdad se obtiene aplicando L'Hôpital dos veces. Por la derecha,

$$f'_+(0) = \left. \frac{d}{dx}(xe^{4-x^2}) \right|_{x=0} = e^4.$$

Como las derivadas laterales no coinciden, f no es derivable en 0. **Conclusión.** f es continua en 0, pero no derivable en ese punto.

b) Extremos relativos en $(0, \infty)$

Para $x > 0$, $f(x) = xe^{4-x^2}$, que es positiva. Derivamos para localizar sus puntos críticos:

$$f'(x) = e^{4-x^2} + xe^{4-x^2}(-2x) = e^{4-x^2}(1 - 2x^2).$$

La exponencial siempre es positiva, por lo que $f'(x) = 0$ cuando $1 - 2x^2 = 0$, es decir, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ en el dominio. La derivada es positiva antes de ese valor y negativa después; por tanto, se trata de un máximo relativo. Su altura es

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{4-\frac{1}{2}} = \frac{e^{7/2}}{\sqrt{2}}.$$

Además, $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0^+$ o $x \rightarrow +\infty$, pero $f(x) > 0$ en $(0, \infty)$; no se alcanza un mínimo. **Conclusión.** Hay un máximo relativo en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e^{7/2}}{\sqrt{2}}\right)$ y no hay mínimo en $(0, \infty)$.

c) Integral

Como el intervalo $[0, 2]$ pertenece al segundo tramo, integramos xe^{4-x^2} . Con el cambio $u = 4 - x^2$, $du = -2x dx$:

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 xe^{4-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_4^0 e^u du = \frac{1}{2} (e^4 - 1).$$

Conclusión. La integral vale $\frac{e^4 - 1}{2}$.

Pregunta A.3 - Trayectoria e impacto de la sonda

La sonda parte de $P = (1, 0, 2)$ y pasa por $Q = (3, 1, 0)$. Su vector director es

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3, 1, 0) - (1, 0, 2) = (2, 1, -2).$$

Por tanto, su trayectoria en forma paramétrica es

$$r : \quad x = 1 + 2t, \quad y = t, \quad z = 2 - 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Punto de impacto y coseno del ángulo

El impacto se produce cuando la trayectoria satisface el plano $\pi : 2x - y + 2z + 5 = 0$. Sustituimos las coordenadas paramétricas:

$$2(1 + 2t) - t + 2(2 - 2t) + 5 = 0 \implies 11 - t = 0,$$

de modo que $t = 11$. El punto de impacto es

$$I = (1 + 22, 11, 2 - 22) = (23, 11, -20).$$

El vector normal del plano es $\vec{n} = (2, -1, 2)$. El coseno del ángulo agudo entre la recta y el vector normal es

$$\cos \theta = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{d}\| \|\vec{n}\|} = \frac{|(2, 1, -2) \cdot (2, -1, 2)|}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}.$$

Conclusión. La sonda impacta en $(23, 11, -20)$ y el coseno del ángulo pedido es $\frac{1}{9}$.

b) Punto en el que suena la alarma

Para un plano $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, la distancia de $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ se calcula mediante

$$d(X_0, \pi) = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

En nuestro caso $X(t) = (1 + 2t, t, 2 - 2t)$ y $\pi : 2x - y + 2z + 5 = 0$; por tanto,

$$d(X(t), \pi) = \frac{|2(1 + 2t) - t + 2(2 - 2t) + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|11 - t|}{3}.$$

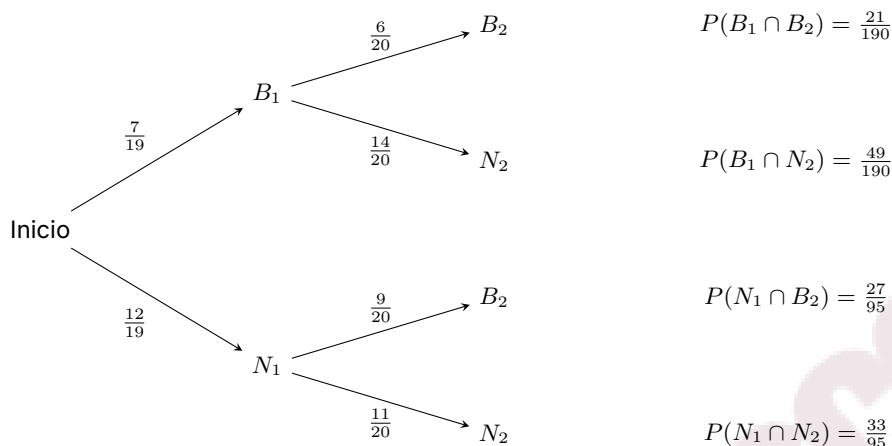
La alarma suena antes del impacto, cuando $t < 11$; así, la distancia es $\frac{11-t}{3}$. Igualamos a 1:

$$\frac{11 - t}{3} = 1 \implies t = 8.$$

Conclusión. La alarma suena cuando la sonda está en $(17, 8, -14)$.

Pregunta A.4 - Extracciones de una urna

Al inicio hay 7 bolas blancas y 12 negras, 19 en total. La primera bola se sustituye por dos del color contrario: si sale blanca, quedan 6 blancas y 14 negras; si sale negra, quedan 9 blancas y 11 negras. En ambos casos hay 20 bolas antes de la segunda extracción. Denotamos por B_i y N_i que la bola de la extracción i sea blanca o negra, respectivamente. En el árbol, las probabilidades de las ramas consecutivas se multiplican para obtener la probabilidad de cada camino.



Al sumar caminos incompatibles que conducen al suceso pedido obtenemos su probabilidad total.

a) Segunda bola blanca

Sumamos las probabilidades de los dos caminos que terminan en una bola blanca:

$$P(B_2) = P(B_2 | B_1)P(B_1) + P(B_2 | N_1)P(N_1) = \frac{7}{19} \frac{6}{20} + \frac{12}{19} \frac{9}{20} = \frac{150}{380} = \frac{15}{38}.$$

Conclusión. La probabilidad de que la segunda bola sea blanca es $\frac{15}{38}$.

b) Segunda bola de color distinto a la primera

Si la primera es blanca, quedan 14 negras entre 20; si la primera es negra, quedan 9 blancas entre 20. Por tanto,

$$P(\text{colores distintos}) = \frac{7}{19} \frac{14}{20} + \frac{12}{19} \frac{9}{20} = \frac{206}{380} = \frac{103}{190}.$$

Conclusión. La probabilidad de obtener colores distintos es $\frac{103}{190}$.

c) Primera negra sabiendo que la segunda fue blanca

Aplicamos Bayes, pues conocemos el color de la segunda bola y queremos determinar el de la primera:

$$P(N_1 | B_2) = \frac{P(B_2 | N_1)P(N_1)}{P(B_2)} = \frac{\frac{9}{20} \cdot \frac{12}{19}}{\frac{15}{38}} = \frac{18}{25}.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es $\frac{18}{25}$.

Pregunta B.1 - Matrices

La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Valores para los que A no es invertible

Una matriz cuadrada es invertible si su determinante es distinto de cero. Desarrollamos el determinante por la primera fila:

$$\det A = 0 - 1 \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = a^2 + a = a(a + 1).$$

La inversa no existe cuando este determinante se anula: **Conclusión.** A no es invertible para $a = 0$ o $a = -1$.

b) Inversa para $a = 1$

Sustituimos $a = 1$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A_1) = 2.$$

Como $\det(A_1) = 2 \neq 0$, existe la inversa y usamos $A_1^{-1} = \frac{1}{\det(A_1)} \text{Adj}(A_1)$. La matriz de cofactores es

$$C(A_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

su traspuesta es la adjunta. En este caso es simétrica, por lo que

$$A_1^{-1} = \frac{1}{2} C(A_1)^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Conclusión. La inversa de A para $a = 1$ es la matriz anterior.

c) Sistema para $a = 2$

Para $a = 2$, el determinante vale $2(2+1) = 6 \neq 0$, así que el sistema tiene una única solución. Sustituimos este valor en la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{cases} y + 2z = 3, \\ x + 2z = -1, \\ 2x + y = -2. \end{cases}$$

De las primeras dos ecuaciones $y = 3 - 2z$ y $x = -1 - 2z$. Sustituimos en la tercera:

$$2(-1 - 2z) + (3 - 2z) = -2 \implies 1 - 6z = -2 \implies z = \frac{1}{2}.$$

Entonces $x = -2$ e $y = 2$. **Conclusión.** La solución es $(x, y, z) = (-2, 2, \frac{1}{2})$.

Pregunta B.2 - Área y recta tangente

La función $f(x) = x + x^2$ es polinómica y, por tanto, está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Área entre la parábola y $y = 2x$

Los puntos de corte satisfacen

$$x + x^2 = 2x \iff x(x - 1) = 0,$$

así que $x = 0$ y $x = 1$. En $[0, 1]$, la diferencia $2x - f(x) = x - x^2 \geq 0$, luego la recta está por encima de la parábola. El área es

$$A = \int_0^1 (2x - (x + x^2)) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Conclusión. El área acotada es $\frac{1}{6}$ unidades cuadradas.

b) Punto de choque

La partícula sale despedida por la tangente a $f(x) = x + x^2$ en $x = 1$. La pendiente es

$$f'(x) = 1 + 2x, \quad f'(1) = 3, \quad f(1) = 2.$$

La tangente a la gráfica en $x = a$ tiene ecuación $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Con $a = 1$,

$$y - 2 = 3(x - 1) \implies y = 3x - 1.$$

Al llegar a la vertical $x = 2$, la coordenada y vale $3 \cdot 2 - 1 = 5$. **Conclusión.** La partícula choca en el punto $(2, 5)$.

Pregunta B.3 - Planos perpendiculares y simetría

Los vectores normales de $\pi_1 : x - 2y + 3z - 6 = 0$ y $\pi_2 : 3x - z - 2 = 0$ son

$$\vec{n}_1 = (1, -2, 3), \quad \vec{n}_2 = (3, 0, -1).$$

a) Perpendicularidad

Dos planos son perpendiculares si sus vectores normales tienen producto escalar nulo:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 0.$$

Conclusión. $\pi_1 \perp \pi_2$.

b) Volumen del cubo

El punto $A = (1, 7, 1)$ pertenece a π_2 , pues $3 - 1 - 2 = 0$, pero no a π_1 . Para hallar su distancia a un plano general $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, usamos

$$d(P, \pi) = \frac{|\alpha x_P + \beta y_P + \gamma z_P + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}},$$

donde $P = (x_P, y_P, z_P)$ es el punto. Sustituimos $P = A$ y $\pi_1 : x - 2y + 3z - 6 = 0$:

$$d(A, \pi_1) = \frac{|1 - 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{16}{\sqrt{14}}.$$

Como las caras apoyadas en π_1 y π_2 son perpendiculares y A es un vértice sobre π_2 que no pertenece a su intersección con π_1 , esa distancia es la arista del cubo. Por tanto,

$$V = \left(\frac{16}{\sqrt{14}} \right)^3 = \frac{1024\sqrt{14}}{49}.$$

Conclusión. El volumen del cubo es $\frac{1024\sqrt{14}}{49}$ unidades cúbicas.

c) Simétrico de A respecto de π_1

El pie de la perpendicular desde A al plano se obtiene proyectando el punto sobre su vector normal. Si $\pi : \vec{n} \cdot X + D = 0$, la fórmula del pie es

$$H = A - \frac{\vec{n} \cdot A + D}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Para π_1 , $\vec{n}_1 = (1, -2, 3)$, $D = -6$, y

$$\vec{n}_1 \cdot A + D = 1 - 14 + 3 - 6 = -16, \quad \|\vec{n}_1\|^2 = 14.$$

Al sustituir en la fórmula, el pie H es

$$H = A - \frac{-16}{14} \vec{n}_1 = (1, 7, 1) + \frac{8}{7}(1, -2, 3) = \left(\frac{15}{7}, \frac{33}{7}, \frac{31}{7} \right).$$

El punto simétrico A' cumple que H es el punto medio de AA' , de modo que $A' = 2H - A$:

$$A' = \left(\frac{23}{7}, \frac{17}{7}, \frac{55}{7} \right).$$

Conclusión. El simétrico de A respecto de π_1 es $\left(\frac{23}{7}, \frac{17}{7}, \frac{55}{7} \right)$.

Pregunta B.4 - Probabilidad e independencia

Las características aparecen con probabilidades $P(A) = 0,2$ y $P(B) = 0,3$, y son independientes. Por tanto, para la intersección multiplicamos las probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06.$$

a) Ambas características

Conclusión. La probabilidad es 0,06.

b) Ninguna característica

Por independencia, la probabilidad de que no aparezca ninguna es

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1 - 0,2)(1 - 0,3) = 0,56.$$

Conclusión. La probabilidad es 0,56.

c) Solamente una característica

Los casos $A \cap \bar{B}$ y $\bar{A} \cap B$ son incompatibles; sumamos sus probabilidades:

$$P(\text{solo una}) = 0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,3 = 0,38.$$

Conclusión. La probabilidad es 0,38.

d) Exactamente tres de diez presentan A

Consideramos diez ensayos independientes, uno por individuo, con probabilidad de éxito $p = 0,2$ (presentar A) y de fracaso $q = 1 - p = 0,8$. Por eso, el número X de individuos que presentan A sigue una distribución binomial: $X \sim \text{Bin}(10, 0,2)$. «Exactamente tres» corresponde al suceso $X = 3$, cuya probabilidad es

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} (0,2)^3 (0,8)^7 = \frac{393216}{1953125} \approx 0,2013.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es exactamente $\frac{393216}{1953125}$, aproximadamente 0,2013.