

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2023--2024 · Convocatoria extraordinaria

Se resuelven las diez preguntas de las dos opciones del examen.

Bloque A

Ejercicio 1 · Ecuaciones matriciales y potencias

Sean $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. De $MN = 2N$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} -a+2b \\ -c+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad -a+2b = -2, \quad c = -2.$$

Además,

$$(N^t M)^t + MP = \begin{pmatrix} -a+2c \\ -b+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a-3b \\ -c-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La segunda coordenada da $-b - c - 1 = 2$; con $c = -2$, resulta $b = -1$. La primera coordenada entonces da $-2a - 1 = -1$, luego $a = 0$.

Para esos valores, $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = M + 2I.$$

De $M^2 - M = 2I$ se deduce $M(M - I) = 2I$, así que $M^{-1} = (M - I)/2$. Para la tercera potencia usamos de nuevo la relación dada: $M^3 = M(M + 2I) = M^2 + 2M = 3M + 2I$.

$$a = 0, \quad b = -1, \quad c = -2; \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M^3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 · Integral y continuidad

a) Integramos $\sqrt{x} = x^{1/2}$ como potencia:

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a) dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - ax \right]_0^1 = \frac{2}{3} - a.$$

Igualando al valor pedido, $\frac{2}{3} - a = \frac{2}{3}$, obtenemos $a = 0$.

b) La única posible discontinuidad está en $x = 0$. El límite izquierdo es $-b$ y el valor y límite por la derecha son 2. Para continuidad debe ser $-b = 2$, es decir, $b = -2$. Con ese valor, las derivadas laterales son $2x|_{x=0} = 0$ y 3, que no coinciden. La función es continua, pero no derivable en 0.

$$a = 0; \quad b = -2 \text{ para continuidad, pero } f \text{ no es derivable en } 0.$$

Ejercicio 3 · Reconstrucción de una función y monotonía

a) Integramos la derivada, en su dominio $x \neq 0$:

$$f(x) = \int \left(-\frac{1}{x^2} + a \right) dx = \frac{1}{x} + ax + C.$$

Usamos los dos puntos: $1 + a + C = 3$ y $1/2 + 2a + C = 7/2$. Al restar se obtiene $a = 1$, y después $C = 1$. Por tanto, $f(x) = 1/x + x + 1$.

b) Para $a = 1$, el dominio sigue siendo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. El signo de la derivada

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

permite estudiar la monotonía. Los puntos críticos son $x = \pm 1$; el signo es positivo si $|x| > 1$ y negativo si $0 < |x| < 1$. Así, f crece en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, y decrece en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$. Hay un máximo relativo en $(-1, -1)$ y un mínimo relativo en $(1, 3)$.

$$a = 1, \quad C = 1; \quad f(x) = \frac{1}{x} + x + 1; \quad \text{crece en } (-\infty, -1), (1, +\infty); \quad \text{decrece en } (-1, 0), (0, 1).$$

Ejercicio 4 · Asíntotas y tangente

El dominio excluye los ceros del denominador: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. En ambos puntos el numerador no se anula. Los límites laterales son

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= +\infty.\end{aligned}$$

así que $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales. Como numerador y denominador tienen el mismo grado,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1,$$

$y = 1$ es asíntota horizontal en ambos extremos y, al existir, no hay oblicua.

En $x = 1$, $f(1) = 5/(-3) = -5/3$. Derivando mediante la regla del cociente,

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2} = -\frac{16x}{(x^2 - 4)^2}, \quad f'(1) = -\frac{16}{9}.$$

La recta tangente satisface $y + 5/3 = -\frac{16}{9}(x - 1)$, por tanto $y = \frac{1-16x}{9}$.

$$x = -2, x = 2 \text{ verticales; } y = 1 \text{ horizontal; } y = \frac{1-16x}{9}.$$

Ejercicio 5 · Minimización con restricciones

Sean x, y los dos números. Buscamos minimizar $S = x + y$ sujeto a

$$0 \leq x, y \leq 10, \quad 2x - y \leq 10, \quad 3x + 2y \geq 12.$$

Como $x, y \geq 0$, se tiene $3x + 2y \leq 3x + 3y = 3S$. La última restricción obliga a $3S \geq 12$, luego $S \geq 4$. El punto $(4, 0)$ cumple todas las restricciones y alcanza esa cota: $2(4) - 0 = 8 \leq 10$ y $3(4) + 2(0) = 12$. Por tanto, es el mínimo.

$$(x, y) = (4, 0); \quad x + y = 4.$$

Bloque B

Ejercicio 6 · Sistema de ecuaciones

Sean g, p, v las cantidades de guitarras, pianos y violines. Las tres condiciones del enunciado dan

$$g + p + v = 70, \quad p + v = g, \quad 4g + 2p + v = 180.$$

De las dos primeras ecuaciones resulta $2g = 70$, luego $g = 35$ y $p + v = 35$. La tercera se convierte en $2p + v = 40$. Restando, $p = 5$, y así $v = 30$.

$$35 \text{ guitarras, } 5 \text{ pianos, } 30 \text{ violines.}$$

Ejercicio 7 · Discusión y resolución de un sistema

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & a & 5 \end{pmatrix}, \quad \det A = 7(a - 3).$$

Si $a \neq 3$, el determinante es no nulo y, por Rouché–Frobenius, el sistema es compatible determinado. Para $a = 3$, la tercera fila de la matriz de coeficientes es la primera más dos veces la segunda; la misma combinación se cumple en los términos independientes ($2 = 2 + 2 \cdot 0$). Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado.

Con $a = 3$, las dos primeras ecuaciones dan $-x + 2z = 2$ y $3x + y + z = 0$. Tomando $z = \lambda$, obtenemos $x = 2\lambda - 2$ y $y = 6 - 7\lambda$.

$$a \neq 3 : \text{SCD}; \quad a = 3 : \text{SCI}, \quad (x, y, z) = (2\lambda - 2, 6 - 7\lambda, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 8 · Probabilidad condicionada

Sean N «el día está nublado» y F «la temperatura baja de 10° ». De la unión,

$$P(N \cap F) = P(N) + P(F) - P(N \cup F) = 0,50 + 0,07 - 0,35 = 0,22.$$

Para el apartado b), usamos el complementario de la unión:

$$P(N^c | F^c) = \frac{P((N \cup F)^c)}{P(F^c)} = \frac{1 - 0,35}{1 - 0,07} = \frac{0,65}{0,93} \approx 0,6989.$$

$$P(N \cap F) = 0,22; \quad P(N^c | F^c) \approx 0,6989.$$

Ejercicio 9 · Intervalo y probabilidad de la media

a) Para estimar la media con desviación típica conocida, usamos $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$. Con $\bar{x} = 65$, $\sigma = 8$, $n = 20$ y $z_{0,995} = 2,576$:

$$65 \pm 2,576 \frac{8}{\sqrt{20}} = 65 \pm 4,606.$$

b) La media de una muestra de 10 asignaturas tiene distribución normal con media 67 y desviación típica $8/\sqrt{10}$. Los extremos 65 y 69 están a 2 puntos de la media, por lo que

$$P(65 \leq \bar{X} \leq 69) = P\left(-\frac{2\sqrt{10}}{8} \leq Z \leq \frac{2\sqrt{10}}{8}\right) = 2\Phi(0,79) - 1 \approx 0,5704.$$

$$IC_{99\%} \approx (60,394, 69,606); \quad P(65 \leq \bar{X} \leq 69) \approx 0,5704.$$

Ejercicio 10 · Probabilidad total y Bayes

Sean R_1, R_2, R_3 los sucesos de que la renta mensual sea menor de 1500 euros, de 1500 a 3000 euros y superior a 3000 euros, respectivamente; sea V que la familia viaje por vacaciones. La probabilidad del primer grupo es $1 - 0,4568 - 0,2398 = 0,3034$. Por probabilidad total,

$$P(V) = 0,3034(0,10) + 0,4568(0,40) + 0,2398(0,85) = 0,41689.$$

La probabilidad de viajar y tener ingresos superiores a 1500 euros suma los dos grupos correspondientes. Aplicando Bayes,

$$P(R_2 \cup R_3 | V) = \frac{0,4568(0,40) + 0,2398(0,85)}{0,41689} = \frac{0,38655}{0,41689} \approx 0,9272.$$

$$P(V) = 0,41689; \quad P(\text{renta} > 1500 | V) \approx 0,9272.$$