Lista de Exercícios e Gabarito - Números Complexos

1. Operações Básicas com Números Complexos

Exercício 1: Calcule a soma e a diferença dos números complexos $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 5 - 2i$. Interprete o resultado graficamente no plano complexo.

Exercício 2: Encontre o produto dos números complexos $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 4 + i$. O que acontece com a magnitude e o argumento do número complexo resultante?

Exercício 3: Calcule o quociente $\frac{z_1}{z_2}$, onde $z_1 = 7 + 6i$ e $z_2 = 2 - i$. Dê a resposta na forma $a + bi$ e explique como a divisão de números complexos pode ser interpretada como uma rotação e um redimensionamento no plano complexo.

Exercício 4: Dado o número complexo $z = 5 + 12i$, determine seu conjugado $\overline{z}$ e seu módulo $|z|$. Explique a relação entre o número complexo e seu conjugado, incluindo sua representação gráfica.

Exercício 5: Resolva a expressão $z_1 \times z_2 - z_3$, onde $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$, e $z_3 = 4i$. Interprete o resultado no plano complexo, considerando os efeitos de cada operação.

2. Representação no Plano Complexo e Forma Trigonométrica

Exercício 6: Represente graficamente os números complexos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -2 + 3i$, e $z_3 = -1 - 2i$ no plano complexo. Determine o módulo e o argumento de cada número e discuta as implicações desses valores na rotação e na escala.

Exercício 7: Determine a forma trigonométrica do número complexo $z = 1 - \sqrt{3}i$. Especifique o módulo r e o argumento θ. Explique como a forma trigonométrica facilita operações como a multiplicação e divisão de números complexos.

Exercício 8: Dado o número complexo $z = 4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$, converta-o para a forma $a + bi$. Descreva a transformação da forma trigonométrica para a forma padrão.

Exercício 9: Encontre as raízes quadradas do número complexo $z = 9i$ usando a forma trigonométrica. Discuta o significado das raízes no plano complexo e como elas estão relacionadas ao número original.

Exercício 10: Seja $z = 3 + 4i$. Determine z^2 e z^3 utilizando a forma trigonométrica. Explique o que acontece com o módulo e o argumento do número complexo conforme ele é elevado a potências sucessivas.

3. Notação Avançada: $cis(\theta)$

Exercício 11: Expresse o número complexo $z = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ usando a notação $cis(\theta)$. Discuta as vantagens dessa notação para operações com números complexos.

Exercício 12: Calcule o produto dos números complexos $z_1 = 3 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $z_2 = 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Escreva a resposta na forma trigonométrica e interprete o resultado geometricamente.

Exercício 13: Divida $z_1 = 4 \cdot cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$ por $z_2 = 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e escreva o resultado na forma trigonométrica. Explique o impacto da divisão na magnitude e na direção do resultado.

Exercício 14: Utilize a Fórmula de De Moivre para calcular $(1+i)^5$. Escreva a resposta na forma $a + bi$ e explique o processo passo a passo.

Exercício 15: Dado o número complexo $z = 2 \cdot cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, encontre z^4 utilizando a notação $cis(\theta)$. Compare os resultados com a multiplicação direta utilizando a forma $a + bi$.

4. Resolução de Equações e Problemas Avançados

Exercício 16: Resolva a equação quadrática $z^2 + 4z + 13 = 0$ no conjunto dos números complexos. Dê as soluções na forma $a + bi$ e discuta a relevância das soluções complexas em diferentes contextos.

Exercício 17: Encontre todas as raízes cúbicas do número complexo $z = 8$. Expresse as respostas em forma trigonométrica e explique como cada raiz está distribuída no plano complexo.

Exercício 18: Resolva o sistema de equações complexas:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 + 2i \\ z_1 - z_2 = 2 - 4i \end{cases}$$

Encontre z_1 e z_2 e interprete os resultados geometricamente.

Exercício 19: Um triângulo no plano complexo tem vértices nos pontos $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, e $z_3 = 1 + i$. Determine o tipo de triângulo (isósceles, equilátero, ou escaleno) utilizando os números complexos e suas representações no plano. Justifique sua resposta.

Exercício 20 (Desafio): Calcule a soma dos cossenos dos ângulos 5°, 77°, 149°, 221° e 293° utilizando a notação $cis(\theta)$ e a Fórmula de De Moivre. Dica: observe que os ângulos formam uma progressão aritmética e lembre-se que $cis(\theta).cis(\alpha) = cis(\theta + \alpha)$

Gabarito

1. Operações Básicas com Números Complexos

Resposta 1: $z_1 + z_2 = 8 + 2i$, $z_1 - z_2 = -2 + 6i$. Graficamente, o ponto correspondente à soma $8 + 2i$ e à diferença $-2 + 6i$ podem ser interpretados como vetores no plano complexo, somando e subtraindo as componentes reais e imaginárias.

Resposta 2: $z_1 \times z_2 = 5 + 14i$. A magnitude do produto é dada por $|z_1| \times |z_2|$, e o argumento do produto é a soma dos argumentos de z_1 e z_2.

Resposta 3: $\frac{z_1}{z_2} = 4 + 7i$. A divisão de números complexos pode ser vista como uma rotação (pelo argumento do denominador) e um redimensionamento (pelo módulo do denominador) do numerador no plano complexo.

Resposta 4: Conjugado: $5 - 12i$; Módulo: $|z| = 13$. O conjugado de um número complexo reflete o ponto no plano complexo em relação ao eixo real.

Resposta 5: $z_1 \times z_2 - z_3 = -10 + 7i$. Cada operação pode ser vista como uma transformação geométrica no plano complexo, com a multiplicação causando rotação e dilatação e a subtração deslocando o ponto.

2. Representação no Plano Complexo e Forma Trigonométrica

Resposta 6: Gráfico representando $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -2 + 3i$, $z_3 = -1 - 2i$. Módulo de $z_1 = \sqrt{2}$, $z_2 = \sqrt{13}$, $z_3 = \sqrt{5}$. Argumento de $z_1 = \frac{\pi}{4}$, $z_2 = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right)$, $z_3 = \arctan(2) + \pi$.

Resposta 7: Forma trigonométrica: $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. A forma trigonométrica permite realizar operações de multiplicação e divisão mais facilmente, usando somas e subtrações de ângulos.

Resposta 8: $z = 2 + 2\sqrt{3}i$. A transformação da forma trigonométrica para a forma padrão envolve a expansão dos termos $\cos\theta$ e $\sin\theta$ e a multiplicação pelo módulo.

Resposta 9: Raízes: $\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ e $\sqrt{6}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$. As raízes estão igualmente espaçadas no plano complexo em relação ao número original.

Resposta 10: $z^2 = -7 + 24i$, $z^3 = -117 + 44i$. À medida que o número complexo é elevado a potências sucessivas, o módulo é elevado à potência e o argumento é multiplicado pela mesma potência.

3. Notação Avançada: $cis(\theta)$

Resposta 11: $z = 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$. A notação $cis(\theta)$ simplifica a escrita e facilita o cálculo de produtos e potências de números complexos.

Resposta 12: $z_1 \times z_2 = 6 \cdot cis\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot cis\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. Geometricamente, o produto de dois números complexos pode ser visto como uma rotação e uma escala.

Resposta 13: $\frac{z_1}{z_2} = 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$. A divisão de números complexos afeta tanto a magnitude quanto o ângulo do resultado, mantendo a relação de escala e rotação.

Resposta 14: $(1+i)^5 = 32i$. Usando a Fórmula de De Moivre, $\left(\sqrt{2}\right)^5 \cdot cis\left(5 \cdot \frac{\pi}{4}\right)$ nos dá $32i$.

Resposta 15: $z^4 = 16 \cdot cis\left(\frac{8\pi}{3}\right) = 16 \cdot cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. O resultado é consistente ao comparar com a multiplicação direta na forma $a + bi$.

4. Resolução de Equações e Problemas Avançados

Resposta 16: Soluções: $z = -2 + 3i$, $z = -2 - 3i$. As soluções complexas são relevantes em vários contextos, como na física e na engenharia, onde modelos precisam de soluções no domínio dos números complexos.

Resposta 17: Raízes cúbicas: $2 \cdot cis\,(0)\,, 2 \cdot cis\left(\frac{2\pi}{3}\right), 2 \cdot cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$. Cada raiz é igualmente espaçada em torno do círculo unitário no plano complexo.

Resposta 18: $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 1 + 3i$. Geometricamente, os resultados podem ser vistos como vetores no plano complexo, com a soma e a diferença de vetores resultando em novos vetores.

Soluções Detalhadas dos Exercícios 19 e 20

Solução do Exercício 19: Para determinar o tipo de triângulo formado pelos pontos $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, e $z_3 = 1 + i$, calculamos as distâncias entre os vértices:

$$d_{12} = |z_2 - z_1| = |1 - 0| = |1| = 1$$

$$d_{13} = |z_3 - z_1| = |(1 + i) - 0| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$d_{23} = |z_3 - z_2| = |(1 + i) - 1| = |i| = 1$$

Portanto, as distâncias são:

$$d_{12} = 1, \quad d_{13} = \sqrt{2}, \quad d_{23} = 1$$

Como $d_{12} = d_{23}$, o triângulo é isósceles.

Solução do Exercício 20: Vamos calcular a soma dos cossenos dos ângulos $5°$, $77°$, $149°$, $221°$ e $293°$ utilizando a notação $cis(\theta)$ e a Fórmula de De Moivre.

Primeiro, escrevemos a soma dos cossenos como a parte real da soma dos números complexos $cis(\theta)$:

$$\cos(5°)+\cos(77°)+\cos(149°)+\cos(221°)+\cos(293°) = \mathrm{Re}\,(cis(5°) + cis(77°) + cis(149°) + cis(221°) + cis(2$$

Note que os ângulos $5°$, $77°$, $149°$, $221°$, e $293°$ formam uma progressão aritmética com razão $72°$. Podemos fatorar a soma como:

$$cis(5°) \times (1 + cis(72°) + cis(144°) + cis(216°) + cis(288°))$$

Agora, observamos que a soma $1+cis(72°)+cis(144°)+cis(216°)+cis(288°)$ é uma soma de uma progressão aritmética de números complexos. Podemos usar a fórmula da soma de uma progressão geométrica:

$$S = \frac{a_n(r^n - 1)}{r - 1}$$

onde $r = cis(72°)$ e $n = 5$. Como $r^5 = cis(360°) = 1$, temos:

$$S = \frac{cis(360°) - 1}{cis(72°) - 1} = \frac{0}{1 - cis(72°)} = 0$$

Assim, a soma total é:

$$\mathrm{Re}\,(cis(5°) \times 0) = 0$$

Portanto, a soma dos cossenos é 0.