

Los cálculos con determinantes y potencias se separan para que se vea qué propiedad se aplica en cada paso.

Opción A - Ejercicio 1

Sea p la longitud de alambre destinada al rectángulo y q la destinada al cuadrado. Entonces $p + q = 100$. Si la altura del rectángulo es h , su base es $2h$ y $p = 6h$; el lado del cuadrado es $q/4$. La suma de áreas es

$$A(h) = 2h^2 + \left(\frac{100 - 6h}{4}\right)^2 = 2h^2 + \left(25 - \frac{3}{2}h\right)^2, \quad 0 \leq h \leq \frac{50}{3}.$$

Buscamos el mínimo:

$$A'(h) = 4h - 3\left(25 - \frac{3}{2}h\right) = 0 \implies h = \frac{150}{17}.$$

Como $A''(h) = 17/2 > 0$, es un mínimo. Así, $p = 6h = 900/17$ y $q = 100 - p = 800/17$:

$\frac{900}{17}$ m para el rectángulo, $\frac{800}{17}$ m para el cuadrado.

Opción A - Ejercicio 2

El dominio es $x > 0$. Integramos dos veces la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{1}{x} \implies f'(x) = \ln x + C_1.$$

La tangente horizontal en $(1, 1)$ da $f'(1) = 0$, luego $C_1 = 0$. Una nueva integración proporciona

$$f(x) = x \ln x - x + C_2.$$

Como $f(1) = 1$, se obtiene $C_2 = 2$. Por tanto,

$f(x) = x \ln x - x + 2, \quad x > 0.$
--

Opción A - Ejercicio 3

Usamos las propiedades del determinante para matrices de orden 3:

$$|A^3| = |A|^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{8}}, \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \boxed{2}.$$

Al multiplicar una matriz de orden 3 por -2 , el determinante se multiplica por $(-2)^3$:

$$|-2A| = (-2)^3|A| = -8 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{-4}.$$

La traspuesta no cambia el determinante, por lo que

$$|AB^T| = |A||B^T| = \frac{1}{2}(-2) = \boxed{-1}.$$

Finalmente, $|B| = -2 \neq 0$, así que B es invertible y su rango es

$$\boxed{\text{rg}(B) = 3}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta de C se parametriza como $(1 + 3t, 2t, t)$. Para que el ángulo en B sea recto, imponemos que $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean perpendiculares:

$$\overrightarrow{BA} = (0, -2, 3), \quad \overrightarrow{BC} = (3t, 2t - 2, t + 1),$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -4t + 4 + 3t + 3 = 0 \implies t = 7.$$

Así, $C = (22, 14, 7)$. Para el área del triángulo ABD , el corte del plano con el eje OX se obtiene poniendo $y = z = 0$: $2x = 6$, luego $D = (3, 0, 0)$. Entonces

$$\overrightarrow{AB} = (0, 2, -3), \quad \overrightarrow{AD} = (2, 0, -2), \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \frac{1}{2} \sqrt{68} = \boxed{\sqrt{17}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

El dominio es $\mathbb{R}$. En $x = 2$, $f(2) = 0$ y $f'(x) = -2x$, así que la pendiente de la normal es $1/4$. La ecuación de la normal es

$$y = \frac{1}{4}(x - 2).$$

La recta $x + 2y - 2 = 0$ tiene pendiente $-1/2$, por lo que una recta perpendicular a ella tiene pendiente 2. Para que la tangente a f tenga esa pendiente:

$$f'(x) = -2x = 2 \implies x = -1, \quad f(-1) = 3.$$

El punto pedido es $(-1, 3)$.

Opción B - Ejercicio 2

Dividimos polinomios y luego descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + x - 2} = x + \frac{2x}{(x+2)(x-1)} = x + \frac{4}{3(x+2)} + \frac{2}{3(x-1)}.$$

Integramos término a término, en cualquier intervalo que no cruce los puntos excluidos $x = -2, 1$:

$$\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x - 2} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3} \ln |x+2| + \frac{2}{3} \ln |x-1| + C.$$

Opción B - Ejercicio 3

Calculamos las primeras potencias para comprobar el ciclo:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 A = -I.$$

Por tanto, A es invertible y, al multiplicar $A^3 = -I$ por $-A^{-1}$, obtenemos

$$A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Al elevar $A^3 = -I$ al cuadrado, $A^6 = I$, así que las potencias se repiten cada 6. Como $100 = 6 \cdot 16 + 4$,

$$A^{100} = A^4 = A \cdot A^3 = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

La intersección de π_2 y π_3 se obtiene de

$$x - 2y + z - 1 = 0, \quad x + z - 4 = 0.$$

Restando las ecuaciones resulta $y = 3/2$; tomando $x = 0$ se obtiene un punto $Q = (0, 3/2, 4)$, y un vector director de la intersección es $(1, 0, -1)$. Buscamos Q sobre esa recta tal que la recta que une $P = (3, 1, -1)$ con Q sea paralela a π_1 . La normal de π_1 es $(3, -1, 1)$; por tanto, el vector $Q - P$ debe ser perpendicular a ella. Escribiendo $Q = (s, 3/2, 4 - s)$:

$$(Q - P) \cdot (3, -1, 1) = 0 \implies 2s - \frac{9}{2} = 0 \implies s = \frac{9}{4}.$$

Así, $Q = (9/4, 3/2, 7/4)$ y un director de la recta buscada es $4(Q - P) = (-3, 2, 11)$. La respuesta, en forma paramétrica, es

$$x = 3 - 3t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = -1 + 11t, \quad t \in \mathbb{R}.$$