

Resolución completa de los ocho ejercicios con desarrollo y resultados exactos.

Ejercicio 1

Si los lados del rectángulo son $a, b > 0$, la diagonal fija impone $a^2 + b^2 = 100$. El área satisface

$$(a - b)^2 \geq 0 \implies 2ab \leq a^2 + b^2 = 100.$$

La igualdad se da cuando $a = b$, así que el rectángulo de área máxima es un cuadrado. Sus lados valen $5\sqrt{2} \text{ cm}$ y el área máxima es 50 cm^2 .

Ejercicio 2

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por tramos, $f(x) = -1/x^2$ si $x < 0$ y $f(x) = 1/x^2$ si $x > 0$. Sus segundas derivadas son, respectivamente, $-6/x^4 < 0$ y $6/x^4 > 0$; por ello es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, \infty)$. No hay punto de inflexión porque 0 no pertenece al dominio. Al acercarse a cero, los límites laterales son $-\infty$ y $+\infty$, de modo que $x = 0$ es asíntota vertical. Cuando $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \rightarrow 0$, así que $y = 0$ es asíntota horizontal en ambos extremos. No hay asíntotas oblicuas. La gráfica tiene una rama negativa a la izquierda y una positiva a la derecha, ambas acercándose al eje X en el infinito.

Ejercicio 3

Integramos $f''(x) = 2 \ln x + 1$ en $(0, \infty)$:

$$f'(x) = 2x \ln x - x + C_1.$$

La condición $f'(e) = e$ da $e + C_1 = e$, así que $C_1 = 0$. Integramos de nuevo:

$$f(x) = x^2 \ln x - x^2 + C_2.$$

Como $f(1) = 0$, resulta $C_2 = 1$. La función buscada es

$$f(x) = x^2 \ln x - x^2 + 1.$$

Ejercicio 4

Para $|x| \leq 1$, $f(x) = 1 - x^2$; fuera de ese intervalo, $f(x) = x^2 - 1$. Igualando cada expresión a $x + 5$ obtenemos los cortes $x = -2$ y $x = 3$; la ecuación en $[-1, 1]$ no tiene raíces reales. Los puntos son $(-2, 3)$ y $(3, 8)$. En $[-2, 3]$ la recta queda por encima de f , y como la expresión de f cambia en $x = -1$ y $x = 1$, dividimos el área:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1} (-x^2 + x + 6) dx + \int_{-1}^1 (x^2 + x + 4) dx \\ &\quad + \int_1^3 (-x^2 + x + 6) dx = \frac{13}{6} + \frac{26}{3} + \frac{22}{3} = \frac{109}{6}. \end{aligned}$$

Ejercicio 5

Calculamos el determinante de A :

$$\det A = 4(m - 1).$$

La matriz es invertible si y solo si $m \neq 1$. Para $m = 0$, la matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -4 \neq 0.$$

Además, $C^2 = I$, luego $C^4 = I$. La ecuación $\frac{1}{2}AX + C^4 = B$ queda $AX = 2(B - I)$, así que

$$X = 2A^{-1}(B - I) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6

El producto fila por matriz $BA = C$ proporciona el sistema

$$\alpha x + y + z = 1, \quad x + \alpha y + z = 1, \quad x + y + \alpha z = 1.$$

La matriz de coeficientes tiene determinante $(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)$. Si $\alpha \neq 1, -2$, el rango es 3 y el sistema es compatible determinado. Si $\alpha = 1$, las tres ecuaciones coinciden con $x + y + z = 1$, de modo que el rango de la matriz y el de la ampliada son $1 < 3$: es compatible indeterminado. Si $\alpha = -2$, la suma de las tres ecuaciones da $0 = 3$, por lo que el sistema es incompatible. Para $\alpha = 0$, resolviendo $y + z = 1$, $x + z = 1$, $x + y = 1$ obtenemos $x = y = z = 1/2$. Para $\alpha = 1$, las soluciones son $x + y + z = 1$.

Ejercicio 7

Dos vectores del plano son $\overrightarrow{BC} = (-1, -2/3, -1)$ y $\overrightarrow{BD} = (-4, -1, 1)$. Su producto vectorial es proporcional a $n = (1, -3, 1)$, que podemos usar como normal. Con el punto $B = (1, 1, 2)$, la ecuación del plano es $x - 3y + z = 0$. El pie H de la perpendicular desde $A = (2, -4, -3)$ se obtiene restando a A la proyección sobre n . Como $n \cdot A = 11$ y $n \cdot n = 11$,

$$H = A - \frac{n \cdot A}{n \cdot n} n = (2, -4, -3) - (1, -3, 1) = (1, -1, -4).$$

El pie es el punto medio de AA' , luego el simétrico es $A' = 2H - A = (0, 2, -5)$.

Ejercicio 8

El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del determinante de los vectores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$:

$$\left| \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -x \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -1 \end{pmatrix} \right| = |(x - 3)(x + 1)| = 5.$$

De $(x - 3)(x + 1) = 5$ se obtiene $x = 4$ o $x = -2$. La ecuación con valor -5 no tiene raíces reales. Para $x = 1$, los vectores de la cara OAB son $OA = (2, -1, 0)$ y $OB = (3, 0, 1)$. Su producto vectorial es $(-1, -2, 3)$, de módulo $\sqrt{14}$. El área de esa cara es

$$\frac{\sqrt{14}}{2}.$$