

Se desarrollan los tres problemas de las dos opciones para cubrir la propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Producción de ensaimadas

Sean g y p las ensaimadas grandes y pequeñas. La masa y el relleno disponibles dan, usando kilogramos,

$$0,5g + 0,25p \leq 20, \quad 0,25g + 0,25p \leq 15, \quad g, p \geq 0.$$

Multiplicamos por 4 para simplificar: $2g + p \leq 80$ y $g + p \leq 60$. El beneficio es $B = 2g + 1,5p$. La región factible tiene vértices $(0, 0)$, $(40, 0)$, $(20, 40)$, $(0, 60)$. Al evaluar:

(g, p)	$(0, 0)$	$(40, 0)$	$(20, 40)$	$(0, 60)$
B (€)	0	80	100	90

El máximo se obtiene con 20 grandes y 40 pequeñas; beneficio máximo: 100 €.

Problema 2 · Función racional

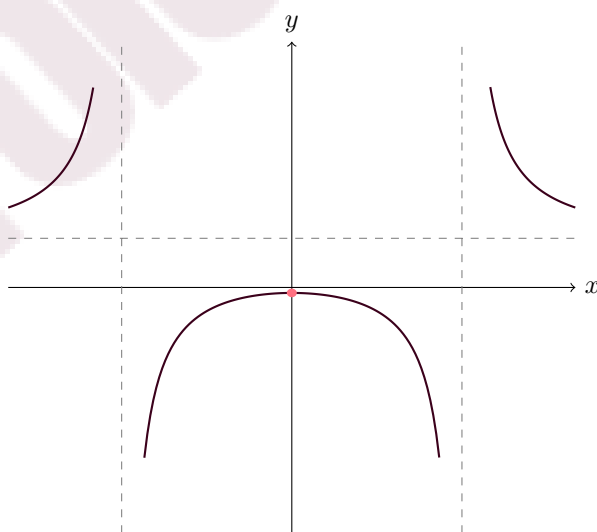
La función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-9}$ no está definida si $x = \pm 3$, por lo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. El numerador siempre es positivo y nunca se anula, así que no hay cortes con el eje X ; con el eje Y corta en $f(0) = -1/9$. Los límites laterales en los ceros del denominador muestran asíntotas verticales en $x = \pm 3$. En el infinito,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-9} = 1,$$

por tanto $y = 1$ es asíntota horizontal. Para la monotonía,

$$f'(x) = \frac{-20x}{(x^2-9)^2}.$$

El denominador es positivo y el signo de la derivada es opuesto al de x ; al separar las asíntotas, f crece en $(-\infty, -3)$ y $(-3, 0)$, y decrece en $(0, 3)$ y $(3, \infty)$. Cambia de creciente a decreciente en $x = 0$, por lo que allí hay máximo local $-1/9$.



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}; (0, -\frac{1}{9}); x = \pm 3; y = 1; \text{máximo local } (0, -\frac{1}{9}).$$

Problema 3 · Probabilidades

Sean A y B los sucesos considerados. De $P(B | A) = 0,9$ y $P(A) = 0,1$ obtenemos la intersección:

$$P(A \cap B) = P(B | A)P(A) = 0,09.$$

Como $P(A | B) = 0,2$, resulta $P(B) = 0,09/0,2 = 0,45$. Por tanto, $P(A \cup B) = 0,1 + 0,45 - 0,09 = 0,46$. Para la independencia debería ser $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, pero $0,09 \neq 0,045$. Finalmente,

$$P(A \cup \bar{B}) = 1 - P(\bar{A} \cap B) = 1 - [P(B) - P(A \cap B)] = 0,64.$$

$$P(A \cap B) = 0,09, \quad P(B) = 0,45, \quad P(A \cup B) = 0,46; \quad A, B \text{ no son independientes}; \quad P(A \cup \bar{B}) = 0,64.$$

Opción B

Problema 1 · Ecuación matricial

Primero calculamos el vector del segundo miembro:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Así, la ecuación queda $2AX - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$, luego

$$2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x + y = 2, \\ x + 3y = 4. \end{cases}$$

Restando las ecuaciones se obtiene $2y = 2$, es decir, $y = 1$; entonces $x = 1$.

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Valoración de una empresa

En cada tramo la función es polinómica. Comprobamos las uniones:

$$f(5^-) = 5 - 0,1 \cdot 5 = 4,5 = f(5^+), \quad f(10^-) = 4,5 + 0,05 \cdot 5 = 4,75 = f(10^+).$$

La función es continua en todo $[0, 13]$. En el primer tramo disminuye de 5 a 4,5; en el segundo aumenta de 4,5 a 4,75; en el tercero $4,75 + 0,1(t - 10)^2$ también aumenta para $t \geq 10$. Los extremos absolutos se comparan entre los valores alcanzados en los extremos y uniones:

$$f(0) = 5, \quad f(5) = 4,5, \quad f(10) = 4,75, \quad f(13) = 4,75 + 0,9 = 5,65.$$

Es continua; el máximo es 5,65 millones en $t = 13$, y el mínimo 4,5 millones en $t = 5$.

Problema 3 · Vino y queso

Sean V el suceso «gusta el vino» y Q el suceso «gusta el queso». Se conoce $P(V) = 0,8$, $P(Q | V) = 0,75$ y $P(\bar{V} \cap \bar{Q}) = 0,04$. La intersección es

$$P(V \cap Q) = P(Q | V)P(V) = 0,75 \cdot 0,8 = 0,60.$$

Como $P(V \cup Q) = 1 - 0,04 = 0,96$, resulta $P(Q) = 0,96 - 0,8 + 0,6 = 0,76$. Así, no gusta el queso al 24%. Las dos probabilidades condicionadas pedidas son

$$P(V | Q) = \frac{0,60}{0,76} = \frac{15}{19}, \quad P(V | \bar{Q}) = \frac{0,8 - 0,6}{1 - 0,76} = \frac{0,2}{0,24} = \frac{5}{6}.$$

$$P(V \cap Q) = 60\%, \quad P(\bar{Q}) = 24\%, \quad P(V | Q) = \frac{15}{19}, \quad P(V | \bar{Q}) = \frac{5}{6}.$$