Aula sobre Polinômios

Objetivo da Aula

Nesta aula, exploraremos o conceito de polinômios, fundamentais na álgebra e em muitas outras áreas da matemática. Discutiremos suas propriedades, operações básicas, fatoração, divisibilidade, e as relações entre coeficientes e raízes. Além disso, abordaremos o comportamento dos polinômios em relação a números complexos e apresentaremos uma seção avançada sobre a criação de polinômios auxiliares.

1. Forma Geral de um Polinômio

Um polinômio de grau n em uma variável x é uma expressão da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde:

- n é o grau do polinômio, que corresponde ao maior expoente de x.
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são os coeficientes, com $a_n \neq 0$. O coeficiente a_n é chamado de coeficiente líder.
- x é a variável.

Exemplo: Considere o polinômio $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$. Aqui:

- O grau do polinômio é 3, porque o termo com o maior expoente é $2x^3$.
- O coeficiente líder é 2.
- Os coeficientes são 2, -4, 3, e -5.

O que é uma raiz de um polinômio?

Uma raiz de um polinômio $P(x)$ é um valor de x para o qual $P(x) = 0$. Em outras palavras, se substituirmos x pela raiz no polinômio, o resultado será zero.

Exemplo: Para o polinômio $P(x) = x^2 - 5x + 6$, $x = 2$ é uma raiz porque:

$$P(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

O mesmo vale para $x = 3$, que também é uma raiz.

2. Número de Raízes e Raízes N-uplas

2.1 Número de Raízes de Acordo com o Grau

O Teorema Fundamental da Álgebra afirma que um polinômio de grau n tem exatamente n raízes (considerando suas multiplicidades) no conjunto dos números complexos.

Exemplo: Considere o polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Para encontrar as raízes, podemos fatorar o polinômio ou usar métodos numéricos.

Fatorando:

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

As raízes são $x = 1$, $x = 2$, e $x = 3$.

Para verificar:

$$P(1) = (1-1)(1-2)(1-3) = 0$$

$$P(2) = (2-1)(2-2)(2-3) = 0$$

$$P(3) = (3-1)(3-2)(3-3) = 0$$

Portanto, essas raízes são válidas.

2.2 Raízes N-uplas

Uma raiz r é chamada de raiz n-upla se r aparece n vezes na fatoração do polinômio. Isso ocorre quando podemos dividir um polinômio por um fator linear $(x - r)$ e o polinômio resultante ainda tem r como raiz.

Exemplo: Considere o polinômio $P(x) = (x-2)^3(x+1)$. Aqui, $x = 2$ é uma raiz tripla, porque:

$$P(x) = (x-2) \times (x-2) \times (x-2) \times (x+1)$$

Dividindo $P(x)$ por $(x-2)$, obtemos $(x-2)^2(x+1)$, que ainda tem $x = 2$ como raiz.

2.3 Como Obter as Raízes de um Polinômio

A obtenção das raízes de um polinômio depende do grau do polinômio e dos métodos disponíveis. Vamos explorar algumas das abordagens mais comuns:

Polinômios do Segundo Grau e a Fórmula de Bhaskara

Para polinômios do segundo grau, da forma $ax^2 + bx + c = 0$, podemos utilizar a fórmula de Bhaskara para encontrar as raízes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Onde:

- a, b, e c são os coeficientes do polinômio.

- $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante.

Exemplo: Considere o polinômio $P(x) = 2x^2 - 4x - 6$. Aplicando a fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = (-4)^2 - 4(2)(-6) = 16 + 48 = 64$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{4 \pm 8}{4}$$

As raízes são $x = 3$ e $x = -1$.

Polinômios de Grau Maior que 2

Para polinômios de grau maior que 2, como $P(x) = ax^n + \cdots + a_0$, não existe uma fórmula geral simples como a de Bhaskara. No entanto, há vários métodos que podemos utilizar:

1. Fatoração e Divisão por Raízes Encontradas: Se conseguimos encontrar uma raiz r de $P(x)$, podemos dividir o polinômio por $(x - r)$ para reduzir seu grau e então continuar o processo para encontrar as demais raízes.

Exemplo: Para o polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, sabemos que $x = 1$ é uma raiz. Dividimos $P(x)$ por $(x - 1)$, obtendo $Q(x) = x^2 - 5x + 6$. Agora podemos usar Bhaskara para encontrar as raízes de $Q(x)$, que são $x = 2$ e $x = 3$.

2. Resolução de Equações na Forma $ax^{2n} + bx^n + c$: Para equações da forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, podemos simplificar o problema substituindo $y = x^n$, transformando a equação em uma de segundo grau:

$$ay^2 + by + c = 0$$

Resolvemos para y usando Bhaskara e depois encontramos as raízes para x a partir de y.

Exemplo: Considere $P(x) = x^4 - 5x^2 + 6$. Substituindo $y = x^2$, temos:

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Aplicando Bhaskara:

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

As soluções são $y = 3$ e $y = 2$, e então $x^2 = 3$ e $x^2 = 2$, resultando em $x = \pm\sqrt{3}$ e $x = \pm\sqrt{2}$.

3. Relações de Girard

As relações de Girard relacionam as raízes de um polinômio com seus coeficientes. Para um polinômio de grau n com raízes $r_1, r_2, \ldots, r_n$ e coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$, temos:

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$
$$r_1r_2r_3 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$
$$\vdots$$
$$r_1r_2 \ldots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Essas relações indicam:

- A soma das raízes é relacionada ao coeficiente a_{n-1}.
- O somatório dos produtos das raízes tomadas de dois em dois é relacionado ao coeficiente a_{n-2}.
- E assim por diante, até chegarmos ao produto de todas as raízes, relacionado ao termo constante a_0.

Exemplo: Considere o polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. As relações de Girard são:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 6$$
$$r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = 11$$
$$r_1r_2r_3 = 6$$

Substituindo as raízes $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, verificamos que:

$$1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 1 = 11, \quad 1 \times 2 \times 3 = 6$$

Essas relações confirmam a validade das raízes.

4. Fatoração e Divisão de Polinômios

4.1 Divisibilidade e Fatoração de Polinômios

Se dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ têm as mesmas raízes, $P(x)$ pode ser dividido por $Q(x)$. A divisibilidade de polinômios é usada para simplificar polinômios ou encontrar fatores comuns.

A fatoração de polinômios envolve expressar um polinômio como o produto de polinômios de grau menor. Se r é uma raiz de $P(x)$, então $P(x)$ pode ser fatorado como $(x - r)Q(x)$.

Exemplo: O polinômio $P(x) = x^2 - 5x + 6$ pode ser fatorado como:

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)$$

Aqui, tanto $x = 2$ quanto $x = 3$ são raízes de $P(x)$, e a fatoração é completa.

De forma geral, um polinômio de grau n pode ser fatorado como:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

onde $r_1, r_2, \dots, r_n$ são as raízes de $P(x)$.

4.2 Divisão de Polinômios e Dispositivo de Briot-Ruffini

A divisão de polinômios é o processo de dividir um polinômio $P(x)$ por outro polinômio $D(x)$, obtendo um quociente $Q(x)$ e um resto $R(x)$, tal que:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

onde o grau de $R(x)$ é menor que o grau de $D(x)$.

Divisão Longa

Exemplo: Vamos realizar a divisão de $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ por $D(x) = x - 1$ utilizando o método da divisão longa.

$$\begin{array}{l|r}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\
x^3 - x^2 & x^2 \\
\hline
-5x^2 + 11x & \\
-5x^2 + 5x & -5x \\
\hline
6x - 6 & \\
6x - 6 & 6 \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Portanto, $P(x)$ pode ser escrito como:

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

Dispositivo de Briot-Ruffini

O dispositivo de Briot-Ruffini é uma técnica eficiente para dividir um polinômio $P(x)$ por um binômio da forma $x - r$, onde r é uma raiz de $P(x)$. Abaixo está o passo a passo de como aplicar o dispositivo:

1. **Escreva os coeficientes de $P(x)$ em uma linha.** Por exemplo, para $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, escrevemos: 1, -6, 11, -6. 2. **Coloque o valor da raiz r à esquerda de uma linha vertical.** Neste caso, usamos $r = 1$. 3. **Baixe o primeiro coeficiente para a linha de baixo.** Este será o primeiro coeficiente do quociente. 4. **Multiplique a raiz pelo número abaixo da linha e adicione o resultado ao próximo coeficiente na linha de cima.** Repita até chegar ao último coeficiente.

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\
 & & 1 & -5 & 6 \\
\hline
 & 1 & -5 & 6 & 0
\end{array}$$

Portanto, o quociente é $x^2 - 5x + 6$, e o resto é 0. Isso confirma que:

$$P(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

Agora, podemos continuar a fatoração de $x^2 - 5x + 6$ usando a fatoração básica:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Logo, a fatoração total do polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ é:

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

5. Operações Básicas com Polinômios

5.1 Adição e Subtração

Para adicionar ou subtrair polinômios, somamos ou subtraímos os coeficientes dos termos correspondentes.

Exemplo: $(2x^3 + 3x^2) + (x^3 - 2x^2) = 3x^3 + x^2$.

5.2 Multiplicação

Para multiplicar polinômios, utilizamos a propriedade distributiva, multiplicando cada termo de um polinômio por cada termo do outro.

Exemplo: $(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$.

5.3 Fato Importante sobre Números Complexos

Se um número complexo $z = a + bi$ é raiz de um polinômio, então o conjugado $\overline{z} = a - bi$ também é raiz do polinômio.

Exemplo: Se $z = 1 + i$ é raiz de $P(x)$, então $\overline{z} = 1 - i$ também é raiz.

6. Seção Avançada: Polinômios Auxiliares

Polinômios auxiliares são usados para resolver problemas onde se conhece o valor de um polinômio para alguns valores específicos de x. Esses polinômios podem ser criados para simplificar a resolução de equações complexas.

6.1 Criação de Polinômios Auxiliares

Para criar um polinômio auxiliar, usamos os valores conhecidos de x e $P(x)$ para construir um novo polinômio $Q(x)$ que simplifica a equação.

Exemplo: Se $P(x)$ é conhecido para $x = 1, 2, 3$, podemos criar um polinômio auxiliar $Q(x)$ que satisfaça $Q(x) = P(x) + k | k = P(1), P(2), P(3)$ para esses valores.

6.2 Aplicação de Polinômios Auxiliares

Vamos considerar um caso onde $P(x)$ é conhecido para $x = 1, 2, 3$, mas os valores não são zeros, e sim $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$. Queremos encontrar um polinômio auxiliar $Q(x)$ tal que $Q(x) = P(x) - x$.

1. **Construindo $Q(x)$:**

$$Q(x) = P(x) - x$$

Assim, temos:

$$Q(1) = P(1) - 1 = 0$$

$$Q(2) = P(2) - 2 = 0$$

$$Q(3) = P(3) - 3 = 0$$

Ou seja, $Q(x)$ tem raízes em $x = 1, 2, 3$.

2. **Fatorando $Q(x)$:** Sabendo que o grau do polinômio é 3, por exemplo, podemos fazer o seguinte:

Como $Q(x)$ tem raízes em 1, 2, e 3, podemos escrever:

$$Q(x) = a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Agora, substituímos $Q(x) = P(x) - x$ para obter:

$$P(x) = a(x - 1)(x - 2)(x - 3) + x$$

3. **Determinação de a:** Para determinar a, podemos usar um valor conhecido de $P(x)$. Por exemplo, se soubermos $P(0)$, podemos substituir $x = 0$ na equação para determinar a. Também há o caso no qual o grau de $Q(x)$ é maior do que o grau de $P(x)$, no qual a tem que ser 0 para manter esse grau. Além disso, podemos retirar informações de um eventual enunciado que nos diga que o coeficiente líder é igual a 1, por exemplo, o que normalmente (mas nem sempre) é o caso. Se $a = 1$, teríamos:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 + x = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$$

Conclusão

Polinômios são ferramentas poderosas na matemática, fundamentais em muitos campos de estudo. Compreender suas propriedades, operações, e o papel das raízes é crucial para resolver uma ampla gama de problemas matemáticos.