

PROBLEMA A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real

a , y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$ siendo I la matriz identidad de

orden 3. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$. (2 + 2 puntos)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$.

(3 puntos)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$. (3 puntos)

Solución:

a) *Rango de A.*

A es 3x3, su máximo rango es 3.

Estudiamos su menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = a(a+1) - 2(a-1)a + 3a(a+1) = a^2 + a - 2a^2 + 2a + 3a^2 + 3a - 2a + 2 =$$

$$= 2a^2 + 4a + 2$$

$$2a^2 + 4a + 2 = 0 \rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

Por lo tanto,

Si $a \neq -1$, $|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$

Si $a = -1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{sabemos que } |A| = 0, \quad \text{como el menor } \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Luego, si $a \neq -1$, $\text{ran}(A) = 3$ y si $a = -1$, $\text{ran}(A) = 2$.

Cuando $a = 1$, ¿ $|2A^{-1}|$?

Si $a = 1$ ($a \neq -1$), luego $|A| \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$

$$\text{Entonces, } |2A^{-1}| = (\text{como A es } 3 \times 3) \quad 2^3 |A^{-1}| = 8 \frac{1}{|A|}.$$

$$\text{Para } a = 1, |A| = (2a^2 + 4a + 2)_{a=1} = 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 2 = 8 \quad \text{y, finalmente, } |2A^{-1}| = 8 \frac{1}{8} = 1.$$

b) Para $a = -1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

El sistema a resolver es: $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - z = -1 \\ -2x + 2z = 2 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{cases}$

La matriz ampliada de este sistema es $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)$

Por lo estudiado en el apartado a), sabemos que $|A| = 0$ y que $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

Calculemos el rango de A' ,

al menor de A no nulo le añadimos la 4ª columna de A' y 1ª fila de A' ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (F_2 = -2xF_1) = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Luego, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < 3 = n^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

Resolvemos el sistema utilizando las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo,

$$\begin{cases} -2x = 2 - 2z & \text{De la 1ª ecuación, } x = -1 + z \\ -3x - 2y = z & \text{Sustituyendo en la 2ª,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -3(-1 + z) - 2y &= z; & -2y &= z + 3(-1 + z) \\ & & -2y &= z - 3 + 3z \\ & & -2y &= -3 + 4z \\ & & y &= \frac{-3 + 4z}{-2} = \frac{3}{2} - 2z \end{aligned}$$

Por lo que la solución pedida será: $\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \frac{3}{2} - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

c) Comprobar que B es invertible.

¿Existe una matriz B^{-1} de manera que $B^{-1} \cdot B = I$?

Sabemos que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B \rightarrow 3B^2 = I - 6B \rightarrow 3B^2 + 6B = I \rightarrow (3B + 6I)B = I$

Por tanto, $B^{-1} = 3B + 6I$

Y además, $m = 3$ y $n = 6$

PROBLEMA A.2. Consideramos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y $s: x = y + 1 = \frac{z - 2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La ecuación del plano que contiene las rectas r y s . (3 puntos)
- La recta que pasa por $P = (0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r . (4 puntos)
- El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$. (3 puntos)

Solución:

a) ¿Plano π ? / r y $s \subset \pi$.

Veamos la posición relativa de r y s .

$$\text{Ecuación paramétrica de } r, \quad r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3 + x \\ z = -3 + 2x \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -3 + 2\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ecuación paramétrica de } s, \quad s: x = y + 1 = \frac{z - 2}{2} \rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

A partir de las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s conocemos:

$$P_r(0, 3, 3), \quad \vec{v}_r = (1, 1, 2), \quad P_s(0, -1, 2) \quad y \quad \vec{v}_s = (1, 1, 2)$$

$$\text{Como } \vec{v}_r = \vec{v}_s \rightarrow r \parallel s$$

$$\text{El plano } \pi \text{ que contiene a } r \text{ y } s \text{ lo obtendremos a partir de } \begin{cases} \text{punto } P_r(0, 3, 3) \\ v. \text{ directores } \begin{cases} \vec{v}_r(1, 1, 2) \\ \vec{P_r P_s}(0, -4, -1) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano π ,

$$\begin{vmatrix} x & y-3 & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} - (y-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$7x + y - 3 - 4z + 12 = 0 \rightarrow 7x + y - 4z + 9 = 0$$

Por lo tanto, el plano que contiene a las rectas r y s es $\pi: 7x + y - 4z + 9 = 0$

b) ¿Recta t ? / $P(0, -1, 2) \in t$ y t corte $\perp$ a r .

De lo calculado en el apartado anterior sabemos: punto genérico de r $P_r(\mu, 3+\mu, 3+2\mu)$ y $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$

El corte entre r y t será el punto P_r de manera que $\vec{PP}_r \perp \vec{v}_r$.

$$\vec{PP}_r = (\mu, 4+\mu, 1+2\mu)$$

$$\text{Como } \vec{PP}_r \perp \vec{v}_r \rightarrow \vec{PP}_r \cdot \vec{v}_r = 0 \rightarrow (\mu, 4+\mu, 1+2\mu) \cdot (1, 1, 2) = 0$$

$$\mu + 4 + \mu + 2 + 4\mu = 0, \quad 6\mu + 6 = 0, \quad 6\mu = -6, \quad \mu = -1$$

Luego el punto de corte entre t y r es $(-1, 2, 1)$

Entonces, como la recta t buscada pasa por $P(0, -1, 2)$ y $Q(-1, 2, 1) \rightarrow \vec{v}_t = (-1, 3, -1)$

Finalmente, la ecuación de la recta pedida será: $t: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$

c) ¿ a, b ? / $s \subset \pi: x - 2y + az = b$

De lo calculado en el apartado a) tenemos la ecuación paramétrica de s ,

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo en la ecuación de π ,

$$\lambda - 2(-1 + \lambda) + a(2 + 2\lambda) = b$$

$$\lambda + 2 - 2\lambda + 2a + 2a\lambda = b$$

$$-\lambda + 2a\lambda = b - 2 - 2a$$

$$\lambda(-1 + 2a) = b - 2 - 2a$$

Para que $s \subset \pi$, la ecuación debe dar $0 = 0$. Por lo que $\begin{cases} -1 + 2a = 0 \\ b - 2 - 2a = 0 \end{cases}$

De la 1ª ecuación $2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$

Sustituyendo en la 2ª ecuación, $b - 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0 \rightarrow b - 3 = 0 \rightarrow b = 3$

Por tanto, $s \subset \pi$ para $a = \frac{1}{2}$ y $b = 3$.

PROBLEMA A.3. Se considera la función $f(x) = x e^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. (3 puntos)
- La representación gráfica de la curva de la curva $y = f(x)$, (2 puntos)
- El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + a x$. (4 puntos)
- El valor de las integrales indefinidas $\int f(x) dx$, $\int x e^{-x} dx$. (1 punto)

Solución:

a) $f(x) = x e^{-x^2}$

$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$, por tanto no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-x^2}) = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{x^2}} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = (\text{aplicando L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2x e^{x^2}} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{-x^2}) = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^{x^2}} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = (\text{aplicando L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2x e^{x^2}} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por lo que la **asíntota horizontal** es $y = 0$.

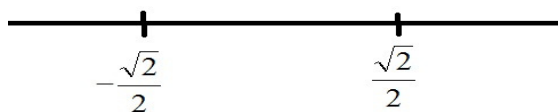
Monotonía.

$$f'(x) = e^{-x^2} + x e^{-x^2} (-2x) = e^{-x^2} (1 - 2x^2)$$

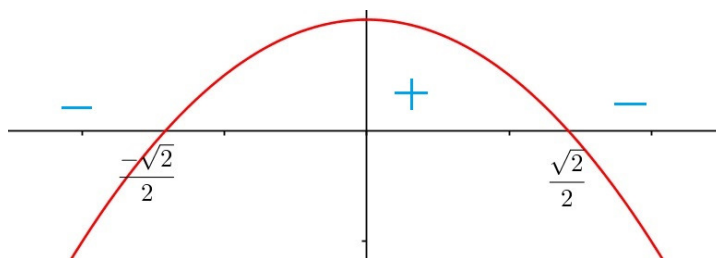
Estudiamos el signo de $f'(x)$,

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^{-x^2} (1 - 2x^2) = 0 \quad \begin{cases} e^{-x^2} = 0 & \text{sin solución} \\ (1 - 2x^2) = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos:



En $f'(x)$ el factor e^{-x^2} es siempre positivo y el factor $(1 - 2x^2)$ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces las obtenidas, por tanto:



Luego, $f(x)$ es **creciente** en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ y **decreciente** en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right)$.

Del estudio de la monotonía de $f(x)$ deducimos que hay un máximo relativo en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y un mínimo

relativo en $x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} \rightarrow \text{Máximo relativo} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right) \cong (0.71, 0.43)$$

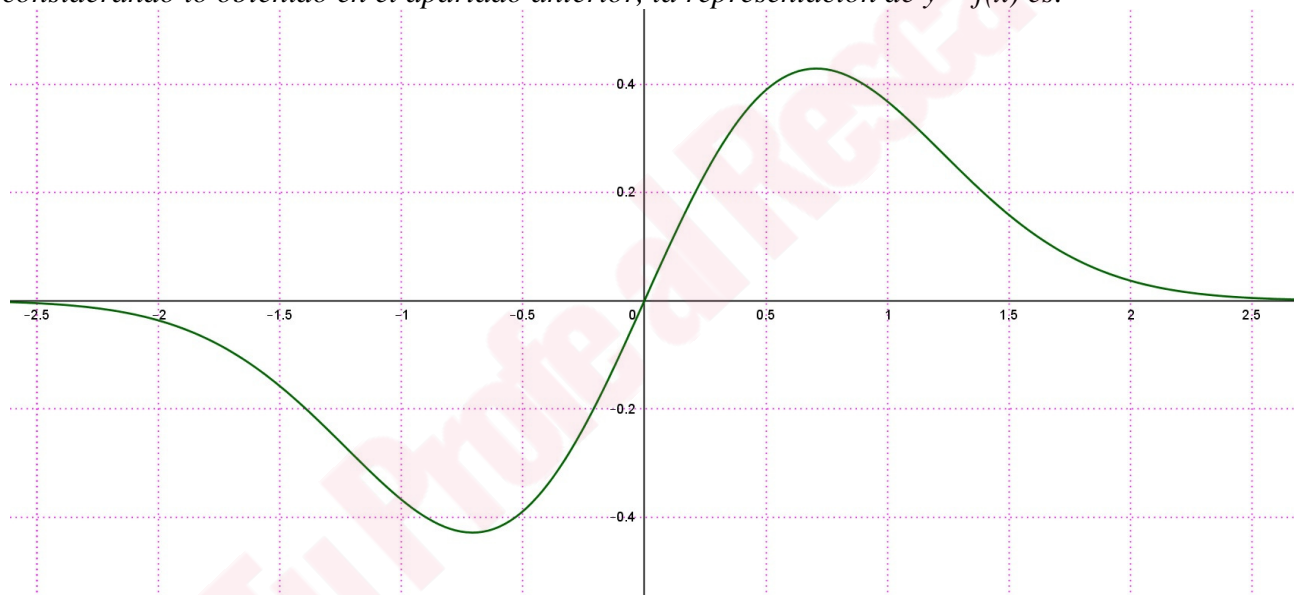
$$x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} e^{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} \rightarrow \text{Mínimo relativo} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right) \cong (-0.71, -0.43)$$

b) Representación gráfica de $y = f(x)$

Obtengamos sus puntos de corte con los ejes coordenados,

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = 0 \cdot e^{-0^2} = 0 \\ y = 0 \rightarrow x \cdot e^{-x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{-x^2} = 0 \text{ sin solución} \end{cases} \end{array} \right\} \text{pto. corte } (0,0)$$

Y considerando lo obtenido en el apartado anterior, la representación de $y = f(x)$ es:



c) ¿a? / $g(x) = f(x) + a x$ cumple el teorema de Rolle en el intervalo $[0, 1]$

$$g(x) = x e^{-x^2} + a x$$

El teorema de Rolle dice:

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, $f(x)$ derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$ entonces $\exists c \in (a, b) / f'(c) = 0$

Por definición, $g(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, entonces:

$g(x)$ es continua en $[0, 1]$

$g(x)$ es derivable en $(0, 1)$

hay que comprobar que $g(0) = g(1)$

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = 0 \\ g(1) = \frac{1}{e} + a \end{array} \right\} \rightarrow 0 = \frac{1}{e} + a \rightarrow a = \frac{-1}{e}$$

Para que $g(x)$ cumpla el teorema de Rolle en el intervalo $[0, 1]$ debe ser $a = \frac{-1}{e}$.

d)

$$1) \int f(x) dx = \int x e^{-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x dx \rightarrow \frac{dt}{-2} = x dx \end{array} \right\} = \int e^t \frac{dt}{-2} = \frac{-1}{2} \int e^t dt =$$

$$= \frac{-1}{2} e^t + C = \frac{-1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$\text{Luego } \int f(x) dx = \frac{-1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$2) \int x e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\} = -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

$$\text{Luego } \int x e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) + C$$

Tu Profecia al Rescate

PROBLEMA B.1. Se tiene el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}, \text{ donde } \alpha$$

es un parámetro real. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible. (4 puntos)
- Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. (4 puntos)
- La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (2 puntos)

Solución:

En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array} \right)$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\left. \begin{aligned} |I| &= 1 \neq 0 \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{array} \right| &= 4 - 3 = 1 \neq 0 \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{array} \right| &= \{ \text{Como } F_3 = F_1 + 2F_2 \} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Estudiamos el rango de A' . { Sabemos que $\text{ran}(A') \geq \text{ran}(A)$ }

A partir del menor de orden 2 no nulo de A formamos el menor de orden 3 de A' ,

$$\left. \begin{aligned} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & \alpha \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \alpha - 14 \end{array} \right| = (\alpha - 14) \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{array} \right| = \alpha - 14 \\ \alpha - 14 = 0 &\rightarrow \alpha = 14 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Para } \alpha = 14, \text{ran}(A') = 2 \\ &\text{Para } \alpha \neq 14, \text{ran}(A') = 3 \end{aligned}$$

a) Si $\alpha = 14$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < 3 = n^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow$ **Sistema Compatible (indeterminado)**

Si $\alpha \neq 14$, $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A') \rightarrow$ **Sistema Incompatible**

b) El sistema es compatible para $\alpha = 14$ y, según lo estudiado inicialmente, el sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo. Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales x e y .

$$\begin{cases} x + y = 4 - z \\ 3x + 4y = 5 - 5z \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 4-z & 1 \\ 5-5z & 4 \end{vmatrix}}{1} = 16 - 4z - 5 + 5z = 11 + z \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-z \\ 3 & 5-5z \end{vmatrix}}{1} = 5 - 5z - 12 + 3z = -7 - 2z \end{aligned}$$

La solución del sistema es:
$$\begin{cases} x = 11 + \lambda \\ y = -7 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Cambiamos el coeficiente 11 por otro número diferente. Lo llamamos r ($r \neq 11$)

La matriz ampliada de este nuevo sistema sería:
$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & r & \alpha \end{array} \right)$$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & r \end{vmatrix} = F_3 - F_1 - 2F_2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & r-11 \end{vmatrix} = (r-11) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = r-11$$

$$r-11=0 \rightarrow r=11$$

Como $r \neq 11 \rightarrow r-11 \neq 0 \rightarrow |A| \neq 0$, por lo tanto $\text{ran}(A) = 3$.

Y como el máximo rango de A' también es 3, obtenemos $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ de incógnitas

Por tanto, **para $r \neq 11$ el sistema sería compatible y determinado.**

PROBLEMA B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π . (4 puntos)
- Los puntos A , B y C intersección del plano π con los ejes OX , OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 puntos)
- El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos A , B y C . (2 puntos)

Solución:

a) ¿Planos paralelos a π / $d(\text{plano}, \pi) = 4$?

Los planos paralelos a π tiene por ecuación: $\sigma: 9x + 12y + 20z + D = 0$

Como $\sigma \parallel \pi \rightarrow d(\pi, \sigma) = d(P_\pi, \sigma)$

Obtengamos un punto del plano π para $x = 0$ e $y = 0 \rightarrow 20z = 180 \rightarrow z = 9 \rightarrow P_\pi = (0, 0, 9)$

$$d(P_\pi, \sigma) = \frac{|9 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 20 \cdot 9 + D|}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2}} = \frac{|180 + D|}{25}$$

$$\text{Debe ser } \frac{|180 + D|}{25} = 4 \rightarrow |180 + D| = 100 \quad \begin{cases} 180 + D = 100 \rightarrow D = -80 \\ 180 + D = -100 \rightarrow D = -280 \end{cases}$$

Los planos pedidos serán: $\sigma_1: 9x + 12y + 20z - 80 = 0$ y $\sigma_2: 9x + 12y + 20z - 280 = 0$

b) $A = \pi \cap \text{eje } OX$

Calculemos la ecuación del eje OX , punto $(0, 0, 0)$ y vector director $(1, 0, 0)$

$$\text{eje } OX : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Luego $A(20, 0, 0)$

$$\pi \cap \text{eje } OX \equiv 9\lambda + 12 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 180 \rightarrow 9\lambda = 180 \rightarrow \lambda = 20$$

$B = \pi \cap \text{eje } OY$

Calculemos la ecuación del eje OY , punto $(0, 0, 0)$ y vector director $(0, 1, 0)$

$$\text{eje } OY : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Luego $B(0, 15, 0)$

$$\pi \cap \text{eje } OY \equiv 9 \cdot 0 + 12\lambda + 20 \cdot 0 = 180 \rightarrow 12\lambda = 180 \rightarrow \lambda = 15$$

$C = \pi \cap \text{eje } OZ$

Calculemos la ecuación del eje OZ , punto $(0, 0, 0)$ y vector director $(0, 0, 1)$

$$\text{eje } OZ : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Luego $C(0, 0, 9)$

$$\pi \cap \text{eje } OZ \equiv 9 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 20\lambda = 180 \rightarrow 20\lambda = 180 \rightarrow \lambda = 9$$

Calculemos los vectores: $\overrightarrow{AB} = (-20, 15, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-20, 0, 9)$. Si $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$\cos \alpha = \frac{|(-20, 15, 0) \cdot (-20, 0, 9)|}{\sqrt{(-20)^2 + 15^2 + 0^2} \sqrt{(-20)^2 + 0^2 + 9^2}} = \frac{|400|}{25 \sqrt{481}} = \frac{400}{25 \sqrt{481}} = 0.7295$$

$$\text{y } \alpha = 43^\circ 15' 24'' = 43^\circ 9' 8'' = 0.75315 \text{ rds.}$$

c) Volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C .

Calculemos los vectores: $\overrightarrow{OA} = (20, 0, 0)$ $\overrightarrow{OB} = (0, 15, 0)$ $\overrightarrow{OC} = (0, 0, 9)$

Entonces el cálculo del volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} 2700 = 450 \text{ u.v.}$$

Por tanto, **el volumen del tetraedro pedido es 450 u.v.**

Tu Profe al Rescate

PROBLEMA B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0,0) y (250,0), respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1,0) y (0,1).

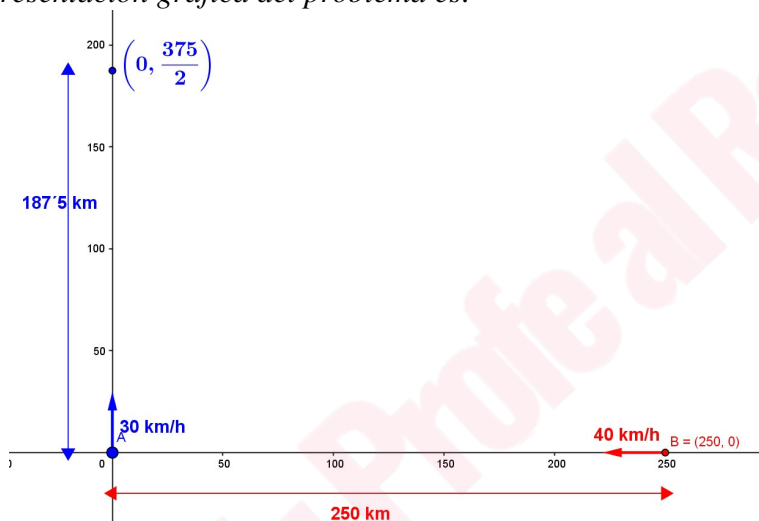
El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse. (2 puntos)
- El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto. (4 puntos)
- Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima. (4 puntos)

Solución:

La representación gráfica del problema es:



La indicación “siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1,0) y (0,1)” significa que en ambos ejes la unidad es 1 km.

La distancia que debe recorrer el móvil A es de 187,5 km, y el móvil B 250 km.

- a) *Distancia entre los móviles en función del tiempo t .*

Al cabo de t horas el móvil A habrá recorrido $30t$ Km y su posición será el punto $(0, 30t)$

Al cabo de t horas el móvil B habrá recorrido $40t$ Km y su posición será el punto $(250 - 40t, 0)$

$$\text{Por tanto, } f(t) = d(A, B) = \sqrt{(250 - 40t - 0)^2 + (0 - 30t)^2} = \sqrt{62500 - 20000t + 1600t^2 + 900t^2} = \sqrt{62500 - 20000t + 2500t^2}$$

$$\text{Luego } f(t) = \sqrt{62500 - 20000t + 2500t^2}.$$

- b) *A llega a su posición final cuando $30t = \frac{375}{2} \rightarrow 60t = 375 \rightarrow t = \frac{375}{60} = 6'25$*

$$\text{B llega a su posición final cuando } 40t = 250 \rightarrow t = \frac{250}{40} = 6'25$$

Luego, ambos móviles tardan 6'25 h en desplazarse desde su posición inicial a la final.

Para obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(t)$ a lo largo del trayecto, estudiamos la monotonía de $f(t)$.

De lo calculado en el apartado a) y lo obtenido en este apartado, sabemos que:

$$f(t) = \sqrt{62500 - 20000t + 2500t^2} \quad 0 \leq t \leq 6'25 \quad \{t \text{ horas y } f(t) \text{ Km}\}$$

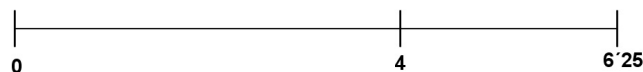
Estudiamos el signo de $f'(t)$

$$f'(t) = \frac{-20000 + 5000t}{2\sqrt{62500 - 20000t + 2500t^2}}$$

$$\frac{-20000 + 5000t}{2\sqrt{62500 - 20000t + 2500t^2}} = 0 \rightarrow -20000 + 5000t = 0 \rightarrow 5000t = 20000$$

$$\rightarrow t = \frac{20000}{5000} = 4$$

Debemos estudiar el signo de $f'(t)$ en los intervalos:



t	$f'(t)$
1	$\frac{-20000 + 5000 \cdot 1}{2\sqrt{62500 - 20000 \cdot 1 + 2500 \cdot 1^2}} = -$
5	$\frac{-20000 + 5000 \cdot 5}{2\sqrt{62500 - 20000 \cdot 5 + 2500 \cdot 5^2}} = +$



Finalmente, $f(t)$ es decreciente en $(0, 4)$ y creciente en $(4, 6'25)$.

c) Máximos y mínimos de $f(t)$

Del estudio de la monotonía de $f(t)$ deducimos que para $t = 4$ hay un mínimo relativo. Y este mínimo relativo es el absoluto porque la función a su izquierda es decreciente y a su derecha creciente.

El máximo de $f(t)$ se alcanzará en alguno de los extremos del intervalo $[0, 6'25]$.

Calculemos el valor de $f(t)$ en estos extremos,

$$t = 0, \quad f(t) = \sqrt{62500 - 20000 \cdot 0 + 2500 \cdot 0^2} = 250$$

$$t = 5, \quad f(t) = \sqrt{62500 - 20000 \cdot 5 + 2500 \cdot 5^2} = 187'5$$

Luego, el máximo se alcanza en $t = 0$.

Para terminar nos falta calcular $f(4)$, $t = 4$, $f(t) = \sqrt{62500 - 20000 \cdot 4 + 2500 \cdot 4^2} = 150$

Finalmente, la distancia máxima entre los móviles A y B se alcanza en el momento inicial ($t = 0$ h) y es de 250 km. La mínima para $t = 4$ h y es de 150 km.