

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Se dispone de 200 hectáreas de terreno en las que se desea cultivar patatas y zanahorias. Cada hectárea dedicada al cultivo de patatas necesita 12,5 litros de agua de riego al mes, mientras que cada una de zanahorias necesita 40 litros, disponiéndose mensualmente de un total de 5000 litros de agua para el riego. Por otra parte, las necesidades por hectárea de abono nitrogenado son de 20 kg para las patatas y de 30 kg para las zanahorias, disponiéndose de un total de 4500 kg de abono nitrogenado. Si la ganancia por hectárea sembrada de patatas es de 300€ y de 400€ la ganancia por cada hectárea de zanahorias, ¿qué cantidad de hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para maximizar la ganancia? ¿Cuál sería esta?

Solución:

Llamando: x = hectáreas dedicadas a cultivar patatas

y = hectáreas dedicadas a cultivar zanahorias

Los datos del problema los podemos resumir en la tabla:

	Hectáreas	Agua (l)	Abono (Kg)	Ganancia (€)
Patatas	x	$12,5 x$	$20 x$	$300 x$
Zanahorias	y	$40 y$	$30 y$	$400 y$
Restricciones	200	5000	4500	

Como las variables x e y representan hectáreas de cultivo deben ser mayores o iguales a cero.

La ganancia viene dada por la función: $z = 300 x + 400 y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar } z = 300 x + 400 y$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} x + y \leq 200 \\ 12,5 x + 40 y \leq 5000 \\ 20 x + 30 y \leq 4500 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x + y \leq 200$

$$x + y = 200$$

x	y
0	200
200	0

¿(0,0) cumple?

$$0 + 0 \leq 200 \quad \text{Sí}$$

(b) $12,5 x + 40 y \leq 5000$

$$12,5 x + 40 y = 5000$$

x	y
0	$\frac{5000}{40} = 125$
$\frac{5000}{12,5} = 400$	0

¿(0,0) cumple?

$$12,5 \cdot 0 + 40 \cdot 0 \leq 5000$$

$$0 \leq 5000 \quad \text{Sí}$$

(c) $20 x + 30 y \leq 4500$

$$20 x + 30 y = 4500$$

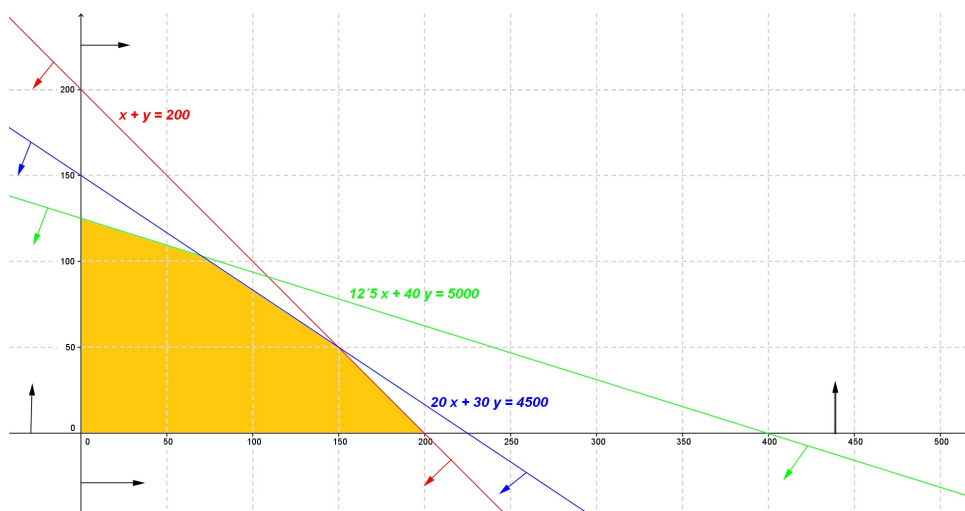
x	y
0	$\frac{4500}{30} = 150$
$\frac{4500}{20} = 225$	0

¿(0,0) cumple?

$$20 \cdot 0 + 30 \cdot 0 \leq 4500$$

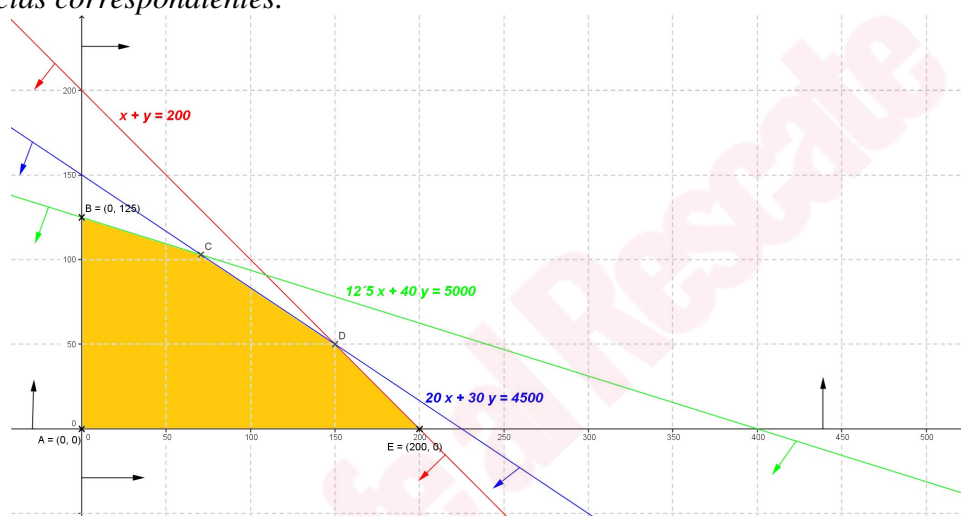
$$0 \leq 4500 \quad \text{Sí}$$

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada.

Los vértices de la región factible son $A(0, 0)$, $B(0, 125)$, C , D y $E(200, 0)$. Los vértices A , B y E los conocemos directamente de la representación gráfica; los vértices C y D los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.



Punto C , corte entre (b) y (c):

$$\begin{cases} 12'5x + 40y = 5000 \\ 20x + 30y = 4500 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \times 3 \\ 2^a \times (-4) \end{matrix} \begin{cases} 37'5x + 120y = 15000 \\ -80x - 120y = -18000 \end{cases}$$

$$\text{Sumando ambas ecuaciones: } -42'5x = -3000 \rightarrow x = \frac{-3000}{-42'5} = \frac{1200}{17} \cong 70'5882$$

sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación:

$$20 \cdot \frac{1200}{17} + 30y = 4500 \rightarrow \frac{24000}{17} + 30y = 4500 \rightarrow 30y = 4500 - \frac{24000}{17}$$

$$\rightarrow 30y = \frac{52500}{17} \rightarrow y = \frac{\frac{52500}{17}}{30} = \frac{1750}{17} \cong 102'9412$$

Luego $C(70'5882, 102'9412)$

Punto D , corte entre (a) y (c):

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 20x + 30y = 4500 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación: $y = 200 - x$, sustituyendo el valor de y en la 2ª ecuación:

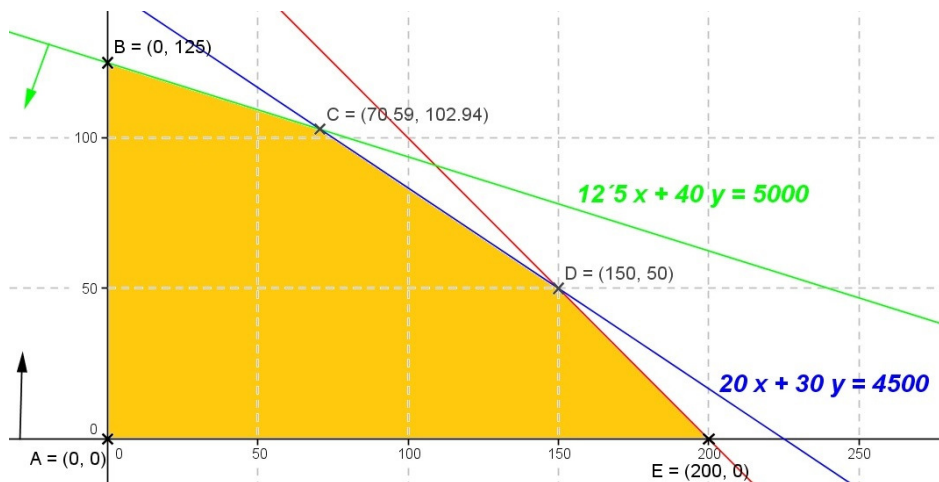
$$20x + 30(200 - x) = 4500; \quad 20x + 6000 - 30x = 4500; \quad -10x = 4500 - 6000$$

$$-10x = -1500 \rightarrow x = \frac{-1500}{-10} = 150$$

Y, finalmente, $y = 200 - 150 = 50$.

Por tanto, $D(150, 50)$

Los vértices de la región factible son: $A (0, 0)$, $B (0, 125)$, $C (70'5882, 102'9412)$, $D (150, 50)$ y $E (200, 0)$.



El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 300x + 400y$	
$0, 0$	$300 \cdot 0 + 400 \cdot 0 = 0$	
$0, 125$	$300 \cdot 0 + 400 \cdot 125 = 50000$	
$70'5882, 102'9412$	$300 \cdot 70'5882 + 400 \cdot 102'9412 = 62352'94$	
$150, 50$	$300 \cdot 150 + 400 \cdot 50 = 65000$	Máximo
$200, 0$	$300 \cdot 200 + 400 \cdot 0 = 60000$	

El máximo se alcanza en el punto $(150, 50)$

Por tanto, conviene dedicar 150 hectáreas al cultivo de patatas y 50 hectáreas al de zanahorias. De esta forma la ganancia sería de 65000€.

Problema 2. Calcula:

- a) Todas las asíntotas verticales y horizontales de la función $f(x) = \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 9x}$
- b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8$.
- c) Los máximos y mínimos de la función $g(x)$ del apartado anterior.

*Solución:*a) *Asíntotas verticales.*

$$\text{Primero resolvemos: } x^3 - 9x = 0 \rightarrow x(x^2 - 9) = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \end{array} \right.$$

*Por tanto, hay tres posible asíntotas verticales: $x = -3$, $x = 0$ y $x = 3$.**Veamos si lo son. El límite de la función para cada valor de x debe dar infinito.*

$$x = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 9x} = \frac{2(-3)^3 + 2(-3) - 1}{(-3)^3 - 9(-3)} = \frac{-54 - 6 - 1}{-27 + 27} = \frac{-61}{0} = \infty, \text{ por tanto } x = -3 \text{ es a.v.}$$

$$x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 9x} = \frac{2 \cdot 0^3 + 2 \cdot 0 - 1}{0^3 - 9 \cdot 0} = \frac{-1}{0} = \infty, \text{ por tanto } x = 0 \text{ es a.v.}$$

$$x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 9x} = \frac{2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 - 1}{3^3 - 9 \cdot 3} = \frac{54 + 6 - 1}{27 - 27} = \frac{59}{0} = \infty, \text{ por tanto } x = 3 \text{ es a.v.}$$

*Asíntota horizontal**Debemos calcular los siguientes límites,*

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 9x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 9x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \end{array} \right\} \text{ por tanto, } y = 2 \text{ es la a.h.}$$

Luego, $f(x)$ tiene tres asíntotas verticales $x = -3$, $x = 0$ y $x = 3$ y una asíntota horizontal $y = 2$.

- b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función
- $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8$
- .

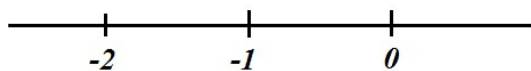
En primer lugar, como $g(x)$ es una función polinómica $\text{Dom } g(x) = \mathbb{R}$ *Debemos estudiar el signo de $g'(x)$*

$$g'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x$$

$$4x^3 + 12x^2 + 8x = 0; \quad 4x(x^2 + 3x + 2) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 4x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \end{array} \right.$$

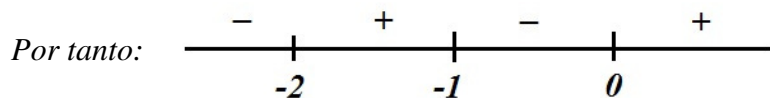
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-3 + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{-3 - 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{array} \right.$$

Hay que estudiar el signo de $g'(x)$ en los siguientes intervalos



Como $g'(x)$ es un polinomio de tercer grado con tres raíces reales, calculando el signo de $g'(x)$ en uno de los intervalos los demás salen de forma alterna,

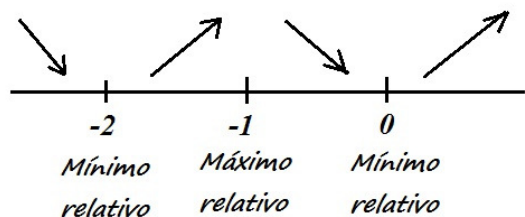
$$x = 1 \rightarrow g'(1) = 4 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 = 4 + 12 + 8 = 24 > 0$$



Luego $g(x)$ es creciente en $(-2, -1) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-1, 0)$.

c) Máximos y mínimos de $g(x)$

Del estudio realizado en el apartado anterior obtenemos:



$$x = -2 \rightarrow g(-2) = (-2)^4 + 4 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 - 8 = 16 - 32 + 16 - 8 = -8$$

$$x = -1 \rightarrow g(-1) = (-1)^4 + 4 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 - 8 = 1 - 4 + 4 - 8 = -7$$

$$x = 0 \rightarrow g(0) = 0^4 + 4 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 - 8 = -8$$

Es decir, $g(x)$ tiene un máximo relativo en $(-1, -7)$ y mínimos relativos en $(-2, -8)$ y $(0, -8)$.

Problema 3. El 25% de los estudiantes de un instituto ha leído algún libro sobre Harry Potter y el 65% ha visto alguna película de este protagonista. Se sabe también que el 10% ha leído algún libro y ha visto alguna de las películas de este personaje. Si se elige al azar un estudiante:

- ¿Cuál es la probabilidad de que haya visto alguna película de este personaje y no haya leído ningún libro sobre Harry Potter?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no haya leído ningún libro sobre Harry Potter y no haya visto alguna película sobre este personaje?
- Si se sabe que ha leído algún libro de Harry Potter, ¿cuál es la probabilidad de que haya visto alguna película de este personaje?

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

A = el estudiante ha leído algún libro de Harry Potter

B = el estudiante ha visto alguna película de Harry Potter

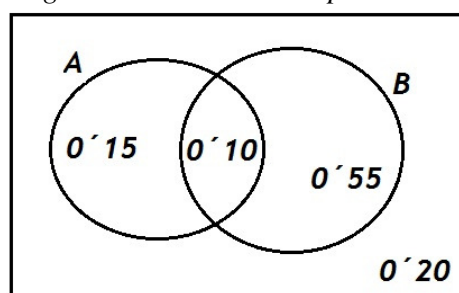
De los datos del problema sabemos:

“El 25% de los estudiantes de un instituto ha leído algún libro sobre Harry Potter” $\rightarrow P(A) = 0.25$

“El 65% ha visto alguna película de este protagonista” $\rightarrow P(B) = 0.65$

“El 10% ha leído algún libro y ha visto alguna de las películas de este personaje” $\rightarrow P(A \cap B) = 0.10$

El diagrama de Venn correspondiente a estos sucesos sería:



Los datos del diagrama provienen de los siguientes cálculos:

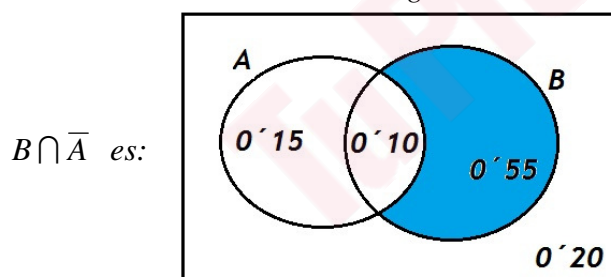
$$P(A) - P(A \cap B) = 0.25 - 0.10 = 0.15$$

$$P(B) - P(A \cap B) = 0.65 - 0.10 = 0.55$$

$$1 - (0.15 + 0.10 + 0.55) = 0.20$$

- a) Se pide $P(B \cap \bar{A})$

Lo resolvemos utilizando el diagrama de Venn.



$B \cap \bar{A}$ es:

Por tanto $P(B \cap \bar{A}) = 0.55$

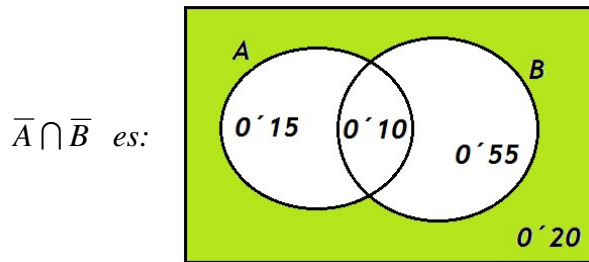
- b) Se pide $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

Por las leyes de Morgan: $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$,

luego, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = (\text{por probabilidad del complementario}) = 1 - P(A \cup B) = (\text{por probabilidad de la unión de dos sucesos}) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [0.25 + 0.65 - 0.10] = 0.20$

Por tanto, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.20$

También se puede resolver usando el diagrama de Venn,



Por tanto $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0'20$

c) Se pide $P(B/A)$

Por definición de probabilidad condicionada, $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0'10}{0'25} = 0'4$

Por tanto, $P(B/A) = 0'4$

Tu Profe al Rescate

Problema 1. En una sucursal de una agencia de viajes se vende un total de 60 billetes de avión con destino a Londres, París y Roma. Sabiendo que el número de billetes para París es el doble de los vendidos para los otros dos destinos conjuntamente y que para Roma se emiten dos billetes más que la mitad de los vendidos para Londres, ¿cuántos billetes se han vendido para cada uno de los destinos?

Solución:

Llamando:

x = número de billetes vendidos con destino a Londres

y = “ “ “ “ “ “ “ París

z = “ “ “ “ “ “ “ Roma

Del enunciado del problema:

“se vende un total de 60 billetes” $\rightarrow x + y + z = 60$

“el número de billetes para París es el doble de los vendidos para los otros dos destinos conjuntamente”

$\rightarrow y = 2(x + z) \rightarrow y = 2x + 2z \rightarrow 2x - y + 2z = 0$

“para Roma se emiten dos billetes más que la mitad de los vendidos para Londres” $\rightarrow z = \frac{x}{2} + 2 \rightarrow$

$2z = x + 4 \rightarrow x - 2z = -4$

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 2z = -4 \end{cases}$$

El determinante del sistema:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 + 4 = 9 \neq 0, \text{ por tanto es un sistema compatible}$$

determinado y podemos resolverlo por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 60 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{9} = \frac{120 - 8 - 4}{9} = \frac{108}{9} = 12$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 60 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}}{9} = \frac{-8 + 120 + 8 + 240}{9} = \frac{360}{9} = 40$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 60 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{9} = \frac{4 + 60 + 8}{9} = \frac{72}{9} = 8$$

Luego, se han vendido 12 billetes para Londres, 40 para París y 8 para Roma.

Problema 2. El rendimiento de un estudiante durante las primeras 6 horas de estudio viene dado (en una escala de 0 a 100) por la función:

$$R(t) = \frac{700t}{4t^2 + 9}$$

donde t es el número de horas transcurrido.

- Calcula el rendimiento a las 3 horas de estudio.
- Determina la evolución del rendimiento durante la primeras 6 horas de estudio (cuándo aumenta y cuándo disminuye). ¿Cuál es el rendimiento máximo?
- Una vez alcanzado el rendimiento máximo, ¿en qué momento el rendimiento es igual a 35?

Solución:

Por definición, $R(t) = \frac{700t}{4t^2 + 9} \quad 0 \leq t \leq 6$

a) Rendimiento a las 3 horas de estudio.

Hay que calcular $R(3)$, $R(3) = \frac{700 \cdot 3}{4 \cdot 3^2 + 9} = \frac{2100}{36 + 9} = \frac{2100}{45} = 46'6667$

Luego, **a las tres horas de estudio el rendimiento es de 46'6667.**

b) Para determinar la evolución del rendimiento durante las seis primeras horas de estudio, calculamos la monotonía de la función $R(t)$

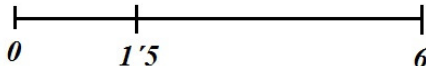
En primer lugar, $\text{Dom } R(t) = [0, 6]$ (por definición de $R(t)$ y porque $4t^2 + 9 \geq 0$ siempre)

$$R'(t) = \frac{700(4t^2 + 9) - 700t \cdot 8t}{(4t^2 + 9)^2} = \frac{2800t^2 + 6300 - 5600t^2}{(4t^2 + 9)^2} = \frac{-2800t^2 + 6300}{(4t^2 + 9)^2}$$

Signo de $R'(t)$, como el denominador está elevado al cuadrado siempre es positivo, por lo que el signo de $R'(t)$ sólo depende del numerador.

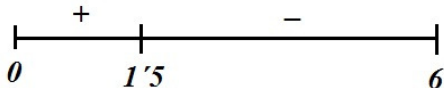
$$-2800t^2 + 6300 = 0 \rightarrow -2800t^2 = -6300 \rightarrow t^2 = \frac{-6300}{-2800} = 2'25 \rightarrow t = \pm\sqrt{2'25} = \pm 1'5$$

Como $\text{Dom } R(t) = [0, 6] \rightarrow t = 1'5$

Hay que estudiar el signo de $R'(t)$ en los intervalos: 

Para $t = 1 \rightarrow R'(1) = \frac{-2800 \cdot 1^2 + 6300}{(4 \cdot 1^2 + 9)^2} = \frac{3500}{169} > 0$

Para $t = 2 \rightarrow R'(2) = \frac{-2800 \cdot 2^2 + 6300}{(4 \cdot 2^2 + 9)^2} = \frac{-11200 + 6300}{25^2} = \frac{-4900}{625} < 0$

Luego: 

Es decir, $R(t)$ es creciente en el intervalo $(0, 1'5)$ y decreciente en $(1'5, 6)$. En $t = 1'5$ $R(t)$ tiene un máximo relativo, además como $R(t)$ a la izquierda es creciente y a la derecha decreciente es el máximo absoluto de $R(t)$.

Para $t = 1'5 \rightarrow R(1'5) = \frac{700 \cdot 1'5}{4 \cdot 1'5^2 + 9} = \frac{1050}{18} = 58'3333$

Para finalizar falta por calcular $R(t)$ en los extremos del dominio,

$$\text{Para } t = 0 \rightarrow R(0) = \frac{700 \cdot 0}{4 \cdot 0^2 + 9} = \frac{0}{9} = 0$$

$$\text{Para } t = 6 \rightarrow R(6) = \frac{700 \cdot 6}{4 \cdot 6^2 + 9} = \frac{4200}{153} = 27'4501$$

Solución: durante las seis primeras horas de estudio el rendimiento aumenta desde el principio ($R = 0$) hasta hora y media después ($R = 58'3333$) y a partir de este momento disminuye (al final $R = 27'4501$).

El rendimiento máximo es de 58'3333 que se alcanza a la hora y media de empezar a estudiar.

c) Una vez alcanzado el rendimiento máximo, ¿en qué momento el rendimiento es igual a 35?

Debemos resolver la siguiente ecuación: $\frac{700t}{4t^2 + 9} = 35$ (y la solución que buscamos debe ser $t > 1'5$)

Resolviendo,

$$700t = 35(4t^2 + 9)$$

$$700t = 140t^2 + 315$$

$$140t^2 - 700t + 315 = 0$$

$$t = \frac{-(-700) \pm \sqrt{(-700)^2 - 4 \cdot 140 \cdot 315}}{2 \cdot 140} = \frac{700 \pm \sqrt{490000 - 176400}}{280} = \frac{700 \pm \sqrt{313600}}{280} = \frac{700 \pm 560}{280} =$$

$$= \begin{cases} t_1 = \frac{700 + 560}{280} = \frac{1260}{280} = 4'5 \\ t_2 = \frac{700 - 560}{280} = \frac{140}{280} = 0'5 \quad \times \end{cases}$$

Es decir, una vez alcanzado el rendimiento máximo, el rendimiento es igual a 35 a las cuatro horas y media de empezar a estudiar.

Problema 3. La probabilidad de que tenga lugar el suceso A es $\frac{2}{3}$, la probabilidad de que no ocurra el suceso B es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que ocurra el suceso A o el suceso B es $\frac{19}{24}$. Calcula:

- La probabilidad de que ocurran a la vez el suceso A y el suceso B.
- La probabilidad de que no ocurra A y no ocurra B.
- La probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.
- ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

Solución:

De los datos del problema sabemos:

$$\begin{cases} P(A) = \frac{2}{3} \\ P(\bar{B}) = \frac{1}{4} \rightarrow [\text{por probabilidad del suceso complementario}] \quad P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ P(A \cup B) = \frac{19}{24} \end{cases}$$

Se pide

a) $P(A \cap B)$

Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, sustituyendo las probabilidades conocidas:

$$\frac{19}{24} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{19}{24} = \frac{16 + 18 - 19}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

$$\text{Luego, } P(A \cap B) = \frac{5}{8}$$

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

Por las leyes de Morgan, $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$, por lo que

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{19}{24} = \frac{24 - 19}{24} = \frac{5}{24}$$

$$\text{Luego, } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{5}{24}$$

$$c) P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

d) Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

$$\text{En este caso: } \begin{cases} P(A \cap B) = \frac{5}{8} \\ P(A) P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8} \neq \frac{5}{8} \end{cases}$$

Luego, los sucesos A y B no son independientes.