

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una finca agrícola cultiva tres tipos de plantas que producen: **tomates**, **pimientos** y **calabacines**. Estas plantas son susceptibles de sufrir una plaga que puede afectar su rendimiento. La finca utiliza tres métodos de control de plagas: **control biológico**, **pesticidas químicos** y **métodos orgánicos**. La efectividad de cada método varía según el tipo de planta.

- El **50 %** del área está dedicada a **tomates**, el **30 %** a **pimientos** y el **20 %** a **calabacines**.
- Para los **tomates**, la finca utiliza **control biológico** en el **40 %** de la finca, **pesticidas químicos** en el **30 %** y **métodos orgánicos** en el **30 %**.
- Para los **pimientos**, la finca utiliza **control biológico** en el **30 %**, **pesticidas químicos** en el **40 %** y **métodos orgánicos** en el **30 %**.
- Para los **calabacines**, se utiliza **control biológico** en el **20 %**, **pesticidas químicos** en el **50 %** y **métodos orgánicos** en el **30 %**.

La efectividad de cada método de control para evitar la plaga, en porcentaje, es la siguiente:

- Para los **tomates**:
 - El **control biológico** tiene un **85 %** de efectividad.
 - Los **pesticidas químicos** tienen un **95 %** de efectividad.
 - Los **métodos orgánicos** tienen un **80 %** de efectividad.
- Para los **pimientos**:
 - El **control biológico** tiene un **80 %** de efectividad.
 - Los **pesticidas químicos** tienen un **90 %** de efectividad.
 - Los **métodos orgánicos** tienen un **75 %** de efectividad.
- Para los **calabacines**:
 - El **control biológico** tiene un **70 %** de efectividad.
 - Los **pesticidas químicos** tienen un **85 %** de efectividad.
 - Los **métodos orgánicos** tienen un **65 %** de efectividad.

Responda a todos los apartados

- 1.1 **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas (sin importar qué tipo de planta ni el método utilizado)?
- 1.2 **(0.75 puntos)** Si se sabe que una planta seleccionada está libre de plagas, ¿cuál es la probabilidad de que esa planta sea un pimiento?
- 1.3 **(1 punto)** Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

T = tomates

P = pimientos

C = calabacines

CB = control biológico

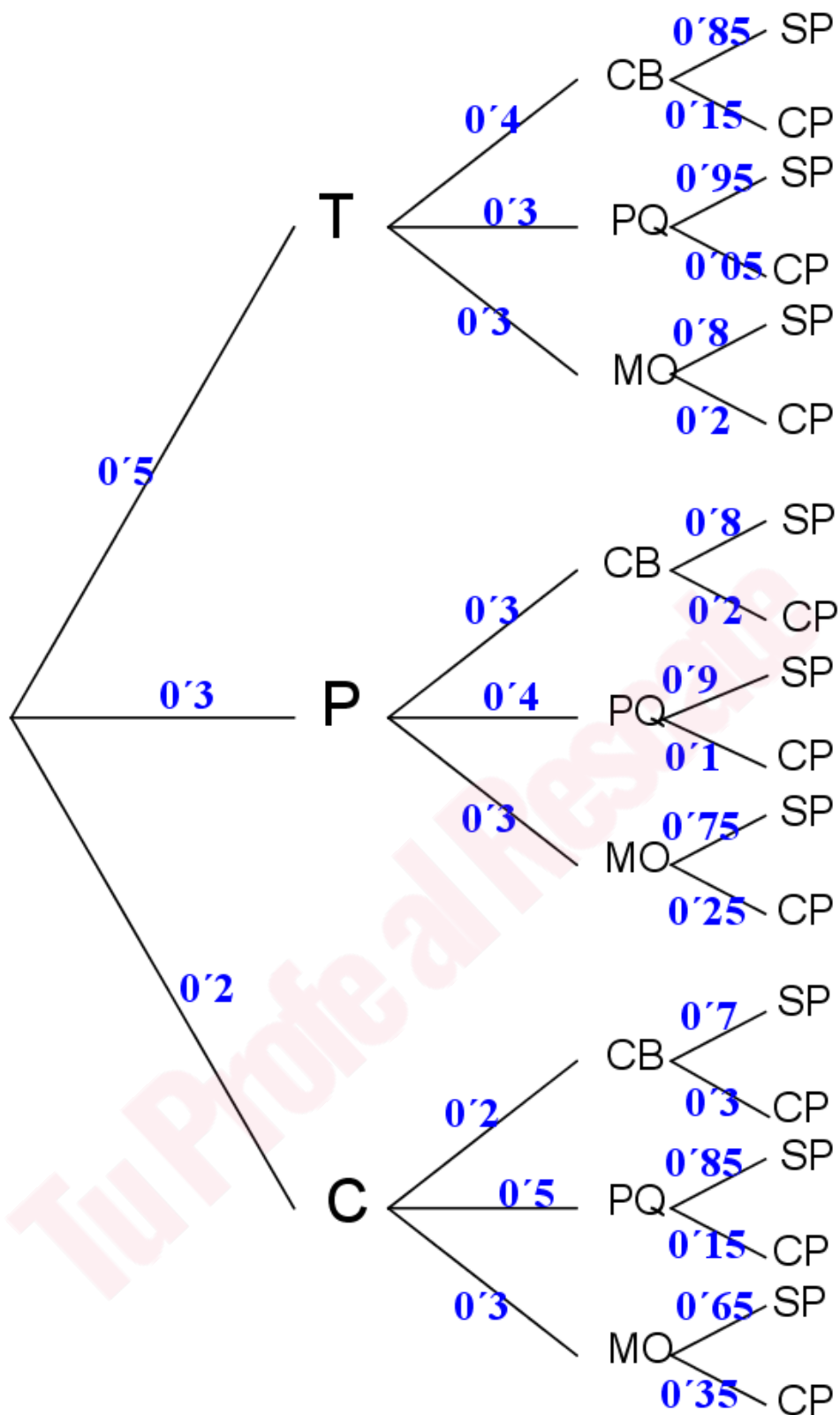
PQ = pesticidas químicos

MO = métodos orgánicos

SP = sin plagas

CP = con plagas

A partir de los datos el árbol del problema es:



a) ¿Cuál es la probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas (sin importar qué tipo de planta ni el método utilizado)?

$$\begin{aligned}
 P(SP) &= 0'5 \cdot 0'4 \cdot 0'85 + 0'5 \cdot 0'3 \cdot 0'95 + 0'5 \cdot 0'3 \cdot 0'8 + \\
 &\quad + 0'3 \cdot 0'3 \cdot 0'8 + 0'3 \cdot 0'4 \cdot 0'9 + 0'3 \cdot 0'3 \cdot 0'75 + \\
 &\quad + 0'2 \cdot 0'2 \cdot 0'7 + 0'2 \cdot 0'5 \cdot 0'85 + 0'2 \cdot 0'3 \cdot 0'65 = 0'832
 \end{aligned}$$

La probabilidad pedida es 0'832.

b) Si se sabe que una planta seleccionada está libre de plagas, ¿cuál es la probabilidad de que esa planta sea un pimiento?

$$P\left(\frac{P}{SP}\right) = \frac{P(P \cap SP)}{P(SP)} = \frac{0'3 \cdot (0'3 \cdot 0'8 + 0'4 \cdot 0'9 + 0'3 \cdot 0'75)}{0'832} = \frac{0'2475}{0'832} \cong 0'2975$$

La probabilidad pedida es 0'2975.

c) Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

El consumidor compra tomates controlados por métodos orgánicos $\rightarrow P(SP) = 0'8$

Consideramos la variable X = número de tomates controlados por métodos orgánicos sin plaga, luego $X = B(11, 0'8)$. Debemos calcular $P(X \geq 3)$

X es una variable binomial de parámetros $n = 11$ y $p = 0'8$.

La tabla que tenemos de la binomial no da los resultados para esta variable (es para $p \leq 0'5$). Por lo tanto utilizaremos la siguiente variable: Y = número de tomates controlados por métodos orgánicos con plaga

Entonces $Y = B(11, 0'2)$ y la tabla nos da los resultados para Y .

La relación entre estas dos variables es:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Y	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

$$X \geq 3 \equiv Y \leq 8 \rightarrow P(X \geq 3) = P(Y \leq 8) = 1'0000$$

También podemos calcular la probabilidad de forma directa:

$X = B(11, 0'8)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = \\ &= 1 - \left[\binom{11}{0} 0'8^0 \cdot 0'2^{11} + \binom{11}{1} 0'8^1 \cdot 0'2^{10} + \binom{11}{2} 0'8^2 \cdot 0'2^9 \right] = 1 - 0'000018 \cong 1'0000 \end{aligned}$$

La probabilidad pedida es 1'0000.

2.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + a z = -2 \\ -x + 2y - a z = 3 \\ a x + y + z = 2 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

2.1.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.1.2 (1.25 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

Solución:

2.1.1)

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - a + a^2 - 2a^2 + a - 1 = -a^2 + 1$$

$$-a^2 + 1 = 0; \quad a^2 = 1; \quad a = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Si $a \neq -1$ y 1

$|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$, y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $a = -1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A ,

$$\text{En } A, \quad \left. \begin{array}{l} |I| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

En A' , como $F_3 = -1 \times F_1 \rightarrow \text{ran}(A') \leq 2$ (el menor de orden 2 no nulo anterior también es de A') por tanto $\text{ran}(A') = 2$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < 3$ (número de incógnitas), luego el sistema es compatible indeterminado.

Si $a = 1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A ,

$$\left. \begin{array}{l} |I| = 1 \neq 0 \\ \text{En } A, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\text{En } A', \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 4 = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A')$, luego el sistema es incompatible.

Por tanto, si $a \neq -1$ y 1 , el sistema es compatible determinado;
 si $a = -1$, el sistema es compatible indeterminado;
 si $a = 1$, el sistema es incompatible.

2.1.2) El sistema es compatible en dos casos. Obtengamos la solución en cada caso.

Si $a \neq -2$ y 1 , S. C. D.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 1 \quad (\text{calculado anteriormente y como las raíces de este polinomio son } 1 \text{ y } -1)$$

$$= -(a-1)(a+1)$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & a \\ 3 & 2 & -a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)(a+1)} = \frac{-4 + 3a + 2a - 4a - 2a + 3}{-(a-1)(a+1)} = \frac{-a-1}{-(a-1)(a+1)} = \frac{-(a+1)}{-(a-1)(a+1)} = \frac{1}{a-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ -1 & 3 & -a \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)(a+1)} = \frac{3 - 2a + 2a^2 - 3a^2 + 2a - 2}{-(a-1)(a+1)} = \frac{-a^2 + 1}{-a^2 + 1} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-(a-1)(a+1)} = \frac{4 + 2 - 3a + 4a - 3 - 2}{-(a-1)(a+1)} = \frac{a+1}{-(a-1)(a+1)} = \frac{1}{-(a-1)} = \frac{1}{1-a}$$

Si $a \neq -1$ y 1 , la solución es:
$$\begin{cases} x = \frac{1}{a-1} \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{1-a} \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

Si $a = -1$, S. C. I.

El sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo calculado en el apartado 2.1.1). Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales x e y .

Sumando ambas ecuaciones: $y = 1$

$$\begin{cases} x - y = -2 + z \\ -x + 2y = 3 - z \end{cases} \rightarrow 2 \cdot \begin{cases} 2x - 2y = -4 + 2z \\ -x + 2y = 3 - z \end{cases} \rightarrow \text{Solución} \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

sumando: $x = -1 + z$

Si $a = -1$ la solución es: $\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Tu Profe al Rescate

2.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener (con los cálculos intermedios necesarios, así como con la mención explícita de los teoremas o propiedades utilizados):

2.2.1 (1.25 puntos) Las matrices A^{-1} y $B = A^3 - 3A^2 + 5A$.

2.2.2 (1.25 puntos) Los valores α y β tales que $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$.

Solución:

2.2.1) Calculemos $|A|$ para asegurarnos de que existe A^{-1} .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 2 = 5 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculamos A^{-1} por el método de los adjuntos,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $B = A^3 - 3A^2 + 5A$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$B = A^3 - 3A^2 + 5A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -12 & -6 \\ 3 & 3 & -6 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ -5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución: $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

2.2.2) Los valores α y β tales que $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$.

Utilizamos el cálculo de B del apartado anterior:

$$B = A^3 - 3A^2 + 5A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5U$$

En la expresión $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$ multiplicamos por A :

$\alpha A^2 \cdot A + \beta A \cdot A + U \cdot A = A^{-1} \cdot A$ [U es la matriz identidad $\rightarrow U \cdot A = A$ y $A^{-1} \cdot A = U$] $\rightarrow \alpha A^3 + \beta A^2 + A = U$;
multiplicando por 5; $5\alpha A^3 + 5\beta A^2 + 5A = 5U$; como $5U = B$; $5\alpha A^3 + 5\beta A^2 + 5A = B$

Hemos obtenido que $B = 5\alpha A^3 + 5\beta A^2 + 5A$ y sabíamos que $B = A^3 - 3A^2 + 5A$ por tanto:

$$5\alpha = 1 \text{ y } 5\beta = -3 \rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \text{ y } \beta = \frac{-3}{5}.$$

Solución: $\alpha = \frac{1}{5}$ y $\beta = \frac{-3}{5}$

3.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Dadas las rectas $r: \begin{cases} y-z=0 \\ 2x+2=0 \end{cases}$ y $s: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = z+2$, obtener:

3.1.1 (1.25 puntos) La ecuación del plano π paralelo a ambas y que pase por el origen.

3.1.2 (1.25 puntos) La distancia de un punto de r y de un punto de s al plano π .

Solución:

Previamente vamos a obtener las ecuaciones paramétricas de r y s .

$$r: \begin{cases} y-z=0 \\ 2x+2=0 \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} y=z \\ 2x=-2 \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} y=z \\ x=-1 \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x=-1 \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \vec{v}_r(0, 1, 1)$$

$$s: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = z+2 \rightarrow s: \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-2+\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \vec{v}_s(-1, 3, 1)$$

3.1.1) ¿Plano π ? / $(0, 0, 0) \in \pi$ $\pi // r$ y $\pi // s$.

Para que $\pi // r$ y $\pi // s \rightarrow$

$$\vec{n}_\pi \perp \vec{v}_r \text{ y } \vec{v}_s \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r \otimes \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\text{Luego } \vec{n}_\pi = (-2, -1, 1) \approx (2, 1, -1)$$

Por tanto, $\pi: 2x + y - z + D = 0$; como $(0, 0, 0) \in \pi \rightarrow 2 \cdot 0 + 0 - 0 + D = 0 \rightarrow D = 0$

Solución: $\pi: 2x + y - z = 0$

3.1.2) La distancia de un punto de r y de un punto de s al plano π

$$P_r(-1, \lambda, \lambda)$$

$$d(P_r, \pi) = \frac{|2 \cdot (-1) + \lambda - \lambda|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$P_s(2-\lambda, 3\lambda, -2+\lambda)$$

$$d(P_s, \pi) = \frac{|2 \cdot (2-\lambda) + 3\lambda - (-2+\lambda)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|4-2\lambda+3\lambda+2-\lambda|}{\sqrt{6}} = \frac{|6|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

Solución: la distancia de un punto de r al plano π es $\frac{\sqrt{6}}{3}$
y la distancia de un punto de s al plano π es $\sqrt{6}$.

3.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Dadas la recta r y el plano π , de ecuaciones $r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$ y $\pi: a x + y - z = b$

con a y b parámetros reales, obtener:

3.2.1 **(1 punto)** Los valores del parámetro a para los que r y π se cortan en un único punto y calcular las coordenadas de dicho punto en función del parámetro a .

3.2.2 **(1.5 puntos)** Los valores de a y b tales que la recta r esté contenida en el plano π y los valores de los parámetros para que la recta r no corte al plano π .

Solución:

3.2.1) ¿a? / $r \cap \pi = \text{punto}$

Obtengamos las ecuaciones paramétricas de la recta r , $r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Sustituyendo los valores de x, y, z de la ecuación de la recta en el plano,

$a \cdot (5 + \lambda) + 1 + 3\lambda - 4\lambda = b$ En esta ecuación la incógnita es λ

$5a + a\lambda + 1 + 3\lambda - 4\lambda = b; \quad 5a + a\lambda + 1 - \lambda = b; \quad a\lambda - \lambda = b - 5a - 1;$

$(a - 1)\lambda = b - 5a - 1; \quad \lambda = \frac{b - 5a - 1}{a - 1}$

Para que haya punto de corte λ debe tener solución, por tanto $a - 1 \neq 0$ y $b - 5a - 1$ cualquier valor, es decir, $a \neq 1$.

Luego, la recta r y el plano π se cortan en un único punto cuando $a \neq 1$.

El punto de corte lo obtendremos sustituyendo el valor de λ en la recta:

$$P: \begin{cases} x = 5 + \frac{b - 5a - 1}{a - 1} = \frac{5a - 5 + b - 5a - 1}{a - 1} = \frac{b - 6}{a - 1} \\ y = 1 + 3 \frac{b - 5a - 1}{a - 1} = \frac{a - 1 + 3b - 15a - 3}{a - 1} = \frac{-14a + 3b - 4}{a - 1} \\ z = 4 \frac{b - 5a - 1}{a - 1} = \frac{4b - 20a - 4}{a - 1} \end{cases}$$

El punto de corte es: $P\left(\frac{b-6}{a-1}, \frac{-14a+3b-4}{a-1}, \frac{4b-20a-4}{a-1}\right) \quad a \neq 1.$

3.2.2) ¿a y b? / $r \subset \pi$.

Para que la recta r esté contenida en el plano π la ecuación que obtuvimos en el apartado 3.2.1), $(a - 1)\lambda = b - 5a - 1$, debe tener infinitas soluciones y para que esto ocurra debe ser:

$a - 1 = 0$ y $b - 5a - 1 = 0$ (para que quede una ecuación de la forma $0 = 0$)

Por lo que, $a = 1$ y

$b - 5 \cdot 1 - 1 = 0; \quad b - 6 = 0; \quad b = 6$

Por tanto, r está contenida en π para $a = 1$ y $b = 6$.

¿a y b? / la recta r no corta al plano π

Para que la recta r no corte al plano π la ecuación que obtuvimos en el apartado 3.2.1), $(a-1)\lambda = b-5a-1$, no debe tener solución y para que esto ocurra debe ser:

$a-1=0$ y $b-5a-1 \neq 0$ (para que quede una ecuación de la forma $0 = \text{núm} \neq 0$)

Por lo que, $a=1$ y

$b-5 \cdot 1-1 \neq 0$; $b-6 \neq 0$; $b \neq 6$

Por tanto, r y π no se cortan para $a=1$ y $b \neq 6$.

Tu Profe al Rescate

4.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Se dan las funciones polinómicas $f(x) = -x^2 + x + 2$ y $g(x) = x^2 - b$, siendo b un parámetro real.

Obtener:

4.1.1 (1.25 puntos) El valor de b para que uno de los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$ sea el punto $P = (-1, 0)$. Un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.

4.1.2 (1.25 puntos) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.

Solución:

4.1.1) ¿ b ? / uno de los puntos de intersección de las curvas sea $(-1, 0)$.

Los puntos de intersección de las dos curvas lo obtenemos a partir de la ecuación:

$$-x^2 + x + 2 = x^2 - b;$$

Como $P(-1, 0)$ es de intersección de ambas curvas la ecuación anterior se cumple para $x = -1$

$$\text{Por tanto: } -(-1)^2 + (-1) + 2 = (-1)^2 - b; \quad -1 - 1 + 2 = 1 - b; \quad 0 = 1 - b; \quad b = 1$$

Para que uno de los puntos de intersección de las curvas sea $(-1, 0)$ debe ser $b = 1$.

Un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$

Ambas curvas corresponden a polinomios de 2º grado, gráficamente son parábolas.

De lo resuelto anteriormente sabemos que ambas curvas pasan por el punto $(-1, 0)$.

Obtengamos otros puntos para representarlas.

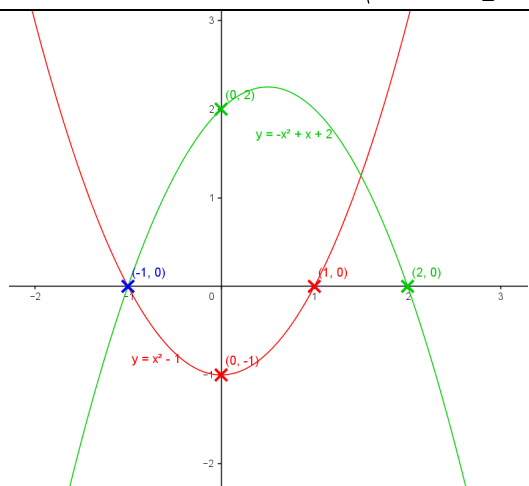
x	$y = x^2 - 1$
-1	0
0	-1
1	0

$$y = -x^2 + x + 2$$

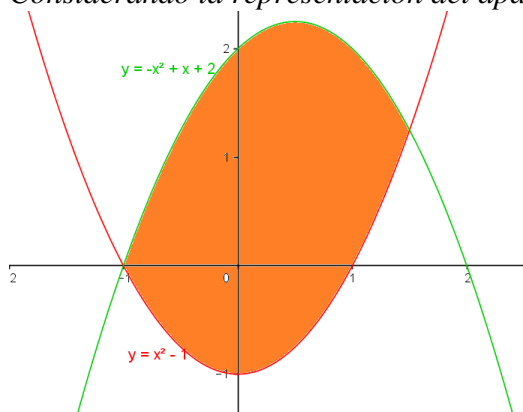
$$x = 0; \quad y = 2$$

$$y = 0; \quad -x^2 + x + 2 = 0; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1+3}{-2} = -1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{-2} = 2 \end{cases}$$

Marcando los puntos obtenidos, la representación de ambas curvas es:



d) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.
Considerando la representación del apartado anterior, el área a calcular es:



Obtengamos las abscisas de los puntos de corte entre ambas:

$$-x^2 + x + 2 = x^2 - 1; \quad -2x^2 + x + 3 = 0; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm 5}{-4} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1+5}{-4} = -1 \\ x_2 = \frac{-1-5}{-4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Y el cálculo de esta área es:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{3/2} [(-x^2 + x + 2) - (x^2 - 1)] dx &= \int_{-1}^{3/2} (-2x^2 + x + 3) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^{3/2} = \\ &= \left(-\frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} + 3\left(\frac{3}{2}\right) \right) - \left(-\frac{2(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 3(-1) \right) = \left(-\frac{9}{4} + \frac{9}{8} + \frac{9}{2} \right) - \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 3 \right) = \frac{27}{8} - \left(-\frac{11}{6} \right) = \\ &= \frac{125}{24} \cong 5'2083 \end{aligned}$$

El área pedida mide $\frac{125}{24}$ u.a.

4.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Una ventana Norman está formada por un rectángulo y un semicírculo. El semicírculo está apoyado sobre el lado horizontal superior del rectángulo, que coincide con el diámetro horizontal del semicírculo.

La base del rectángulo mide x y su altura mide y , por lo que el diámetro del semicírculo mide x .

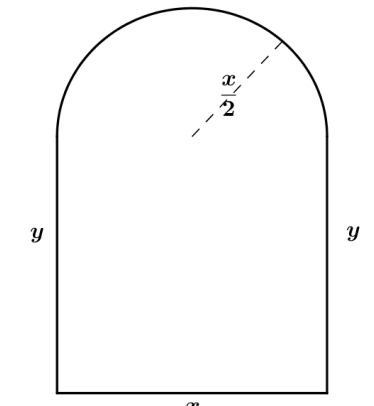
Obtener:

4.2.1 (1 punto) La expresión $S(x)$ que da el área de una ventana Norman de perímetro 5 metros en función de su anchura x .

4.2.2 (1.5 puntos) El valor de x para el que la función $S(x)$ tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.

Solución:

La anchura de la ventana es x , la altura de la parte rectangular y , el radio del semicírculo superior es $x/2$.

	El perímetro de la ventana es de 5m. La longitud del semicírculo es: $\pi \frac{x}{2}$. El perímetro de la ventana es: $x + 2y + \frac{\pi}{2}x$ Como hay que obtener el área de la ventana en función de x, despejemos y: $x + 2y + \frac{\pi}{2}x = 5; \quad 2y = 5 - x - \frac{\pi}{2}x; \quad y = \frac{5}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x$
---	---

4.2.1) Área de la ventana,

$$\text{Área de la ventana} = \text{Área del rectángulo } (xy) + \text{Área del semicírculo } \left(\frac{\pi r^2}{2} \right),$$

$$S(x) = x \left(\frac{5}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x \right) + \frac{\pi \left(\frac{x}{2} \right)^2}{2} = \frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{8}x^2$$

Como x e y son longitudes, $x, y > 0$ (si alguna es 0 no hay ventana), por tanto $\frac{5}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x > 0$,

$$\frac{5}{2} > \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}x, \quad \frac{5}{2} > \frac{2x + \pi x}{4}, \quad \frac{5}{2} > \frac{(2 + \pi)x}{4}, \quad 10 > (2 + \pi)x; \quad x < \frac{10}{2 + \pi} \cong 1.9449$$

Finalmente, el área de la ventana Norman de perímetro 5 metros en función de su anchura, x , es

$$S(x) = \frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{8}x^2 \quad x \in \left(0, \frac{10}{2 + \pi} \right) \quad x \text{ en metros.}$$

4.2.2) El valor de x para el que la función $S(x)$ tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.

Buscamos el área máxima.

$$S'(x) = \frac{5}{2} - x - \frac{\pi}{4}x = \frac{5}{2} - \left(1 + \frac{\pi}{4} \right)x$$

$$S'(x) = 0 \rightarrow \frac{5}{2} - \left(1 + \frac{\pi}{4} \right)x = 0; \quad \frac{5}{2} = \left(1 + \frac{\pi}{4} \right)x; \quad \frac{5}{2} = \frac{4 + \pi}{4}x; \quad x = \frac{10}{4 + \pi} \cong 1.40025 \in \left(0, \frac{10}{2 + \pi} \right)$$

Como $S'(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo, es una recta de pendiente negativa, entonces a la izquierda de su raíz es positiva y a la derecha negativa.

En $x = \frac{10}{4+\pi}$ hay un máximo relativo.

Valor del área máxima.

$$S(x) = \frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{8}x^2$$

$$\begin{aligned} \text{para } x = \frac{10}{4+\pi} \rightarrow S\left(\frac{10}{4+\pi}\right) &= \frac{5}{2} \frac{10}{4+\pi} - \frac{\left(\frac{10}{4+\pi}\right)^2}{2} - \frac{\pi}{8} \left(\frac{10}{4+\pi}\right)^2 = \frac{25}{4+\pi} - \frac{\frac{100}{(4+\pi)^2}}{2} - \frac{100\pi}{8(4+\pi)^2} = \\ &= \frac{25}{4+\pi} - \frac{50}{(4+\pi)^2} - \frac{25\pi}{2(4+\pi)^2} = \frac{2 \cdot 25(4+\pi) - 2 \cdot 50 - 25\pi}{2(4+\pi)^2} = \frac{200 + 50\pi - 100 - 25\pi}{2(4+\pi)^2} = \frac{100 + 25\pi}{2(4+\pi)^2} = \\ &= \frac{25(4+\pi)}{2(4+\pi)^2} = \frac{25}{2(4+\pi)} \cong 1'7503 \end{aligned}$$

El valor de x para el que la función $S(x)$ tenga un máximo relativo es $\frac{10}{4+\pi}m \cong 1'40025m$ y el valor de dicha área máxima es $\frac{25}{2(4+\pi)}m^2 \cong 1'7503m^2$.