

Junio de 2005 · Convocatoria ordinaria

En el examen se elige uno de los ejercicios y se resuelven tres de sus cuatro problemas. No se pueden elegir a la vez los problemas 4.1 y 4.2. Aquí se desarrollan todos para que se puedan estudiar por separado.

Ejercicio A · Problema 1

Qué se pide. Calcular las entradas de las matrices X e Y que cumplen las dos ecuaciones matriciales.

El enunciado da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix},$$

El sistema matricial es

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B, \\ AX - AY = C. \end{cases}$$

Como A multiplica por la izquierda a las dos incógnitas, llamamos $U = AX$ y $V = AY$. Así el sistema queda

$$\begin{cases} 2U - 3V = B, \\ U - V = C. \end{cases}$$

Restamos 2 veces la segunda ecuación de la primera:

$$(2U - 3V) - 2(U - V) = B - 2C \implies -V = B - 2C \implies V = 2C - B.$$

Después, de $U - V = C$, despejamos $U = C + V = 3C - B$. Calculamos ambas matrices por separado:

$$2C - B = \begin{pmatrix} -34 & -60 \\ 20 & 36 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix},$$

$$3C - B = \begin{pmatrix} -51 & -90 \\ 30 & 54 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 & -90 \\ 19 & 53 \end{pmatrix}.$$

Ahora recuperamos X e Y . Primero comprobamos que A es invertible:

$$\det A = 2 \cdot 3 - (-5)(-1) = 6 - 5 = 1 \neq 0, A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $Y = A^{-1}V$ y $X = A^{-1}U$. Hacemos cada producto:

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-16) + 5(9) & 3(-60) + 5(35) \\ -16 + 2(9) & -60 + 2(35) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -33 & -90 \\ 19 & 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-33) + 5(19) & 3(-90) + 5(53) \\ -33 + 2(19) & -90 + 2(53) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. Si $X = (x_{ij})$ e $Y = (y_{ij})$, entonces

$$x_{11} = -4, x_{12} = -5, x_{21} = 5, x_{22} = 16, y_{11} = -3, y_{12} = -5, y_{21} = 2, y_{22} = 10.$$

Ejercicio A · Problema 2

Qué se pide. Hallar primero los puntos de corte de tres rectas con el plano en función de m , y después elegir m para que el triángulo tenga área 1.

El plano ya está en forma general:

$$\pi: y + z - 12m = 0.$$

Escribimos las tres rectas en forma paramétrica:

$$u: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t, \end{cases} v: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2t \\ z = t, \end{cases} w: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3t \\ z = t. \end{cases}$$

Para hallar cada intersección, sustituimos sus coordenadas en la ecuación del plano.

- En u , $t + t - 12m = 0$, de donde $t = 6m$. Así, $A = (1, 6m, 6m)$. - En v , $2t + t - 12m = 0$, de donde $t = 4m$. Así, $B = (2, 8m, 4m)$. - En w , $3t + t - 12m = 0$, de donde $t = 3m$. Así, $C = (3, 9m, 3m)$.

Para el área de un triángulo usamos la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2m, -2m), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (2, 3m, -3m),$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2m & -2m \\ 2 & 3m & -3m \end{vmatrix} = (0, -m, -m).$$

Su módulo es

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{0^2 + (-m)^2 + (-m)^2} = \sqrt{2}|m|.$$

Por tanto,

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{\sqrt{2}|m|}{2}.$$

Imponemos el área pedida:

$$\frac{\sqrt{2}|m|}{2} = 1 \implies |m| = \sqrt{2}.$$

Conclusión.

$$A = (1, 6m, 6m), B = (2, 8m, 4m), C = (3, 9m, 3m); m = \pm\sqrt{2}.$$

Ejercicio A - Problema 3

Qué se pide. Encontrar el punto de corte de las curvas y el área encerrada entre ellas y el eje OY .

Las dos funciones son polinómicas; por eso, ambas tienen dominio $\mathbb{R}$. Para los puntos de corte igualamos sus ordenadas:

$$(x-1)^3 = 5 - x^2 \implies x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0.$$

Factorizamos:

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = (x-2)(x^2 + 3).$$

Como $x^2 + 3 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la única solución real es $x = 2$. La ordenada correspondiente es

$$y = (2-1)^3 = 1.$$

El punto de corte es $(2, 1)$.

El eje OY corresponde a $x = 0$, así que el recinto se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 2$. Para decidir qué función va arriba, probamos $x = 0$:

$$5 - 0^2 = 5, \quad (0-1)^3 = -1.$$

En ese intervalo la parábola $5 - x^2$ está por encima de la cúbica $(x-1)^3$. El área se calcula como integral de "función de arriba menos función de abajo":

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^2 [(5 - x^2) - (x-1)^3] dx \\ &= \int_0^2 (6 - x^3 + 2x^2 - 3x) dx \\ &= \left[6x - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_0^2 \\ &= \left(12 - 4 + \frac{16}{3} - 6 \right) - 0 = \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

Conclusión. El corte es $(2, 1)$ y el área es $\frac{22}{3} u^2$.

Ejercicio A · Problema 4.1

Qué se pide. Probar que cualquier cono circular recto inscrito en una esfera ocupa menos del 30% del volumen de esa esfera.

Sea $R > 0$ el radio de la esfera, h la altura del cono y r el radio de su base. En la sección que pasa por el eje del cono, el teorema de Pitágoras da

$$r^2 + (R - h)^2 = R^2 \implies r^2 = 2Rh - h^2.$$

El dominio geométrico es $0 \leq h \leq 2R$. Los volúmenes son

$$V_{\text{cono}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h^2 (2R - h)}{3}, \quad V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Definimos $u = h/R$, de modo que $0 \leq u \leq 2$. La razón que queremos acotar es

$$F(u) = \frac{V_{\text{cono}}}{V_{\text{esfera}}} = \frac{u^2(2-u)}{4}.$$

Es una función polinómica, por lo que su dominio es todo $\mathbb{R}$; para este problema solo usamos el intervalo geométrico $[0, 2]$. Derivamos y buscamos los puntos críticos:

$$F'(u) = \frac{4u - 3u^2}{4} = \frac{u(4 - 3u)}{4} = 0 \implies u = 0 \text{ o } u = \frac{4}{3}.$$

Estudiamos el signo con un valor de prueba en cada intervalo:

$$F'(1) = \frac{1}{4} > 0, \quad F'\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{12} < 0.$$

Intervalo de u Valor de prueba Signo de $F'(u)$ Comportamiento

$(0, 4/3)$ $u = 1$ + Crece

$(4/3, 2)$ $u = 5/3$ - Decrece

Así, en $u = 4/3$ se alcanza el máximo. Comprobamos también los extremos del intervalo:

$$F(0) = 0, \quad F(2) = 0, \quad F\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{(4/3)^2(2/3)}{4} = \frac{8}{27}.$$

Así, el valor máximo es $8/27$. La comparación con el 30% es exacta:

$$\frac{8}{27} < \frac{3}{10} \text{ porque } 80 < 81.$$

Conclusión. Para todo cono inscrito,

$$\frac{V_{\text{cono}}}{V_{\text{esfera}}} \leq \frac{8}{27} < 0,30.$$

Por tanto, su volumen siempre es menor que el 30% del volumen de la esfera.

Ejercicio A · Problema 4.2

Qué se pide. Hallar las dos rectas de regresión y usar la adecuada para estimar la calificación cuando $x = 6$.

El enunciado da

$$\bar{x} = 9,2, \quad \bar{y} = 7,5, \quad r = 0,7, \quad \sigma_y = 2\sigma_x.$$

La recta de regresión de y sobre x tiene pendiente

$$m_{y|x} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0,7 \cdot 2 = 1,4.$$

Pasa por el punto medio $(\bar{x}, \bar{y})$, así que

$$\hat{y} - \bar{y} = m_{y|x}(x - \bar{x}) \implies \hat{y} - 7,5 = 1,4(x - 9,2).$$

Despejando:

$$\hat{y} = 1,4x - 5,38.$$

Para la recta de x sobre y , la pendiente es

$$m_{x|y} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,7 \cdot \frac{1}{2} = 0,35.$$

También pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$\hat{x} - \bar{x} = m_{x|y}(y - \bar{y}) \implies \hat{x} - 9,2 = 0,35(y - 7,5),$$

es decir,

$$\hat{x} = 0,35y + 6,575.$$

Como conocemos el número de problemas hechos, $x = 6$, usamos la regresión de y sobre x :

$$\hat{y} = 1,4 \cdot 6 - 5,38 = 8,4 - 5,38 = 3,02.$$

Conclusión.

$$\hat{y} = 1,4x - 5,38, \hat{x} = 0,35y + 6,575, \hat{y}(6) = 3,02.$$

La calificación estimada es **3,02**.

Ejercicio B · Problema 1

Qué se pide. Clasificar el sistema según α como incompatible (SI), compatible determinado (SCD) o compatible indeterminado (SCI), y resolver los casos compatibles.

El sistema que aparece en el enunciado es

$$\begin{cases} x + \alpha y + \alpha^2 z = 1, \\ x + \alpha^2 y + \alpha z = \alpha, \\ x + \alpha^2 y + \alpha^2 z = \alpha^2, \end{cases}$$

Su matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}, A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{array} \right).$$

1. Calculamos el determinante y localizamos los casos especiales. Restar la primera fila a las filas segunda y tercera no cambia el determinante. Si escribimos $d = \alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1)$, queda

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & d & -d \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} = d^2 = \alpha^2(\alpha - 1)^2.$$

Preguntamos cuándo este determinante vale cero:

$$\det A = 0 \iff \alpha^2(\alpha - 1)^2 = 0 \iff \alpha = 0 \text{ o } \alpha = 1.$$

Por tanto, estudiamos por separado esos dos valores.

Caso 1: $\alpha \neq 0, 1$. Como $\det A \neq 0$, el menor de orden 3 formado por las tres columnas de A es no nulo y

$$\text{rg}(A) = 3.$$

Ese mismo menor aparece dentro de A^* , así que $\text{rg}(A^*) \geq 3$. Como ambas matrices tienen tres filas, $\text{rg}(A^*) = 3$. Aplicamos Rouché-Frobenius:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{número de incógnitas}.$$

El sistema es **compatible determinado (SCD)**.

Resolvemos por eliminación. Restamos la ecuación segunda de la tercera:

$$(x + \alpha^2 y + \alpha^2 z) - (x + \alpha^2 y + \alpha z) = \alpha^2 - \alpha \implies dz = d \implies z = 1.$$

Ahora restamos la segunda ecuación de la primera y sustituimos $z = 1$:

$$\begin{aligned} -dy + dz &= 1 - \alpha, \\ -dy + d &= 1 - \alpha, \\ dy &= d + \alpha - 1 = \alpha^2 - 1, \end{aligned} \implies y = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha(\alpha - 1)} = \frac{\alpha + 1}{\alpha}.$$

Sustituimos y y z en la segunda ecuación:

$$x + \alpha^2 \frac{1 + \alpha}{\alpha} + \alpha = \alpha \implies x + \alpha(1 + \alpha) = 0 \implies x = -\alpha(1 + \alpha).$$

Así, la solución única es

$$(x, y, z) = \left(-\alpha(1 + \alpha), \frac{1 + \alpha}{\alpha}, 1 \right), \alpha \neq 0, 1.$$

Caso 2: $\alpha = 0$. Sustituimos en las tres ecuaciones:

$$x = 1, x = 0, x = 0.$$

Las dos primeras ya son incompatibles. Lo justificamos mediante los rangos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{rg}(A) = 1.$$

En la ampliada, el menor de orden 2 que toma las filas primera y segunda y las columnas de x y del término independiente es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Por ello $\text{rg}(A^*) \geq 2$; las filas de A^* muestran que no puede superar 2, luego $\text{rg}(A^*) = 2$. Así,

$$\text{rg}(A) = 1 \neq 2 = \text{rg}(A^*),$$

y, por Rouché–Frobenius, es **incompatible (SI)**.

Caso 3: $\alpha = 1$. Al sustituir, las tres ecuaciones coinciden:

$$x + y + z = 1.$$

Las tres filas de A son $(1, 1, 1)$, y la fila $(1, 1, 1)$ es un menor de orden 1 no nulo; por tanto $\text{rg}(A) = 1$. En A^* las tres filas son $(1, 1, 1 \mid 1)$, así que también $\text{rg}(A^*) = 1$. Rouché–Frobenius da

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < 3,$$

de modo que el sistema es **compatible indeterminado (SCI)**. Tomamos $y = \lambda$ y $z = \mu$; entonces $x = 1 - \lambda - \mu$:

$$(x, y, z) = (1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Conclusión.

$$\begin{aligned} \alpha = 0 & : \text{SI}, \\ \alpha = 1 & : \text{SCI}, \\ \alpha \neq 0, 1 & : \text{SCD y } (x, y, z) = \left(-\alpha(1 + \alpha), \frac{1 + \alpha}{\alpha}, 1 \right). \end{aligned}$$

Ejercicio B · Problema 2

Qué se pide. Encontrar los planos que pasan por $P = (-7, 2, -3)$ y cuya proyección perpendicular desde el origen cae en la recta indicada.

El punto de proyección debe pertenecer a la recta indicada. La pasamos a la forma paramétrica exigida:

$$r : \begin{cases} x = t, \\ y = 4, t \in \mathbb{R}. \\ z = 1, \end{cases}$$

Llamamos $H = (t, 4, 1)$ a ese punto. Como H es la proyección perpendicular del origen sobre el plano, el vector normal del plano es

$$\vec{n} = \overrightarrow{OH} = (t, 4, 1).$$

Además, tanto P como H están en el plano, así que el vector $\overrightarrow{PH}$ es perpendicular al normal:

$$\overrightarrow{PH} = H - P = (t + 7, 2, 4),$$

$$\overrightarrow{PH} \cdot \vec{n} = 0 \implies (t + 7, 2, 4) \cdot (t, 4, 1) = 0 \implies t^2 + 7t + 12 = 0.$$

Factorizamos:

$$(t + 3)(t + 4) = 0 \implies t = -3 \text{ o } t = -4.$$

Para $t = -3$, $H = (-3, 4, 1)$ y $\vec{n} = (-3, 4, 1)$. La ecuación general del plano que pasa por P es

$$-3(x + 7) + 4(y - 2) + (z + 3) = 0 \implies \boxed{3x - 4y - z + 26 = 0}.$$

Para $t = -4$, $H = (-4, 4, 1)$ y $\vec{n} = (-4, 4, 1)$:

$$-4(x + 7) + 4(y - 2) + (z + 3) = 0 \implies \boxed{4x - 4y - z + 33 = 0}.$$

Conclusión. Los dos planos, ambos en forma general, son

$$\pi_1 : 3x - 4y - z + 26 = 0, \pi_2 : 4x - 4y - z + 33 = 0.$$

Ejercicio B · Problema 3

Qué se pide. Elegir a y b para que la función definida a trozos sea continua en todos los reales.

La función es

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x + a, & x > 0, \\ b, & x = 0, \\ \frac{\sin(\pi x)}{x}, & x < 0. \end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R}$: el primer tramo se usa solo donde $x > 0$ y existe $\ln x$; el tercero, solo donde $x < 0$, así que su denominador x no se anula; y el valor en $x = 0$ está definido por separado. En cada intervalo abierto, la fórmula correspondiente es continua: $x \ln x + a$ para $x > 0$, y $\sin(\pi x)/x$ para $x < 0$. Solo hay que comprobar el punto de unión $x = 0$. El valor de la función allí es $f(0) = b$.

Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\pi x)}{x} = \pi \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \pi.$$

Límite por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + a) = a,$$

porque $x \ln x \rightarrow 0$. Por ejemplo, usando L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Para que exista el límite bilateral, los dos límites laterales deben coincidir; además, ese valor debe ser $f(0) = b$:

$$a = \pi, b = \pi.$$

Conclusión.

$$\boxed{a = b = \pi.}$$

Ejercicio B · Problema 4.1

Qué se pide. Usar el modelo de concentración para hallar cuándo actúa el fármaco y en qué instante alcanza su concentración máxima.

El enunciado proporciona

$$C(t) = -0,29483t + 0,04253t^2 - 0,00035t^3 \text{ mg/ml},$$

donde t se mide en minutos. Por ser un polinomio, la fórmula tiene dominio $\mathbb{R}$; en el contexto del problema solo tiene sentido $t \geq 0$. No hay asíntotas verticales porque no hay denominador. Tampoco hay horizontal ni oblicua: el término cúbico hace que $C(t)$ crezca en valor absoluto como t^3 , no se aproxima a una recta.

Periodo en que actúa. El fármaco actúa cuando $C(t) > 0$. Factorizamos t :

$$C(t) = t(-0,29483 + 0,04253t - 0,00035t^2).$$

Además de $t = 0$, las raíces positivas se obtienen igualando a cero el factor cuadrático:

$$0,00035t^2 - 0,04253t + 0,29483 = 0.$$

La fórmula cuadrática da

$$t = \frac{0,04253 \pm \sqrt{(0,04253)^2 - 4(0,00035)(0,29483)}}{2(0,00035)} \approx 7,381, 114,134.$$

Para fijar el signo entre las raíces, probamos valores de C :

$$C(1) < 0, C(10) > 0, C(120) < 0.$$

Por tanto, con $t \geq 0$, la concentración es positiva entre las dos raíces positivas.

Instante de concentración máxima. Derivamos:

$$C'(t) = -0,29483 + 0,08506t - 0,00105t^2.$$

Igualamos a cero y resolvemos:

$$0,00105t^2 - 0,08506t + 0,29483 = 0 \implies t \approx 3,629, 77,381.$$

Comprobamos el signo en cada intervalo con un valor de prueba:

Intervalo de t	Prueba	Signo de $C'(t)$	Comportamiento
$[0, 3,629)$	$t = 0$	—	decrece
$(3,629, 77,381)$	$t = 10$	+	crece
$(77,381, \infty)$	$t = 100$	—	decrece

Así, C decrece hasta 3,629, crece entre 3,629 y 77,381, y vuelve a decrecer después. El primer punto es un mínimo; el segundo es un máximo. Como 77,381 pertenece al intervalo en que $C(t) > 0$, allí se alcanza la concentración máxima durante el periodo de actividad:

$$C(77,381) \approx 69,678 \text{ mg/ml}.$$

Conclusión. Según el modelo,

$$C(t) > 0 \text{ para } 7,381 < t < 114,134 \text{ minutos}$$

y la concentración máxima se alcanza aproximadamente a los

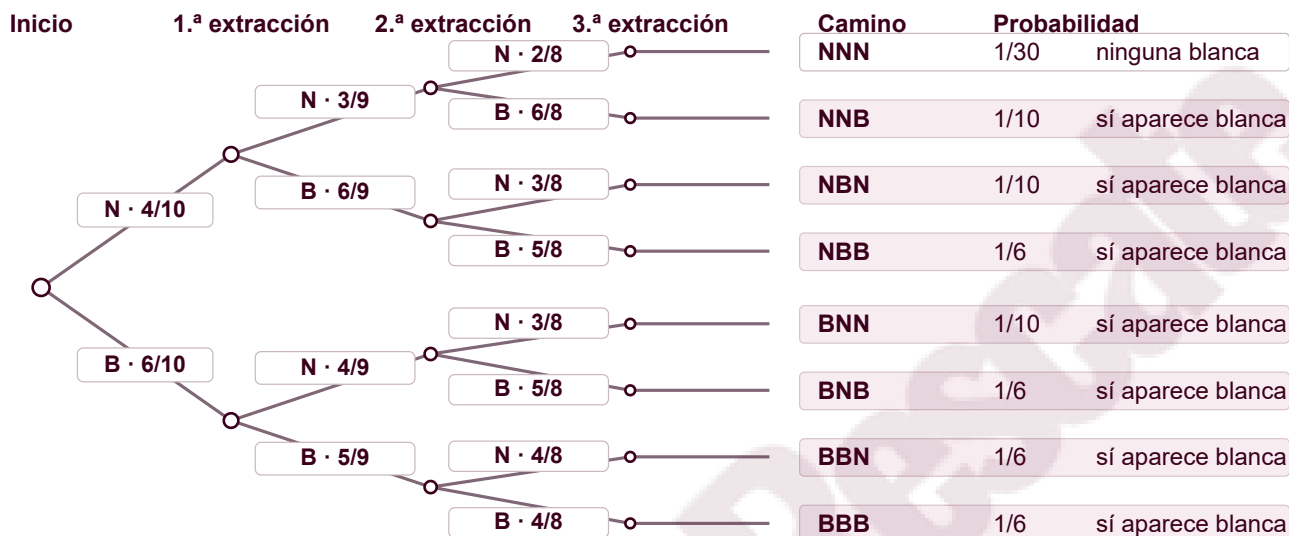
$$77,381 \text{ minutos.}$$

Ejercicio B · Problema 4.2

Qué se pide. Hallar cuántas bolas hay que extraer, sin reemplazo, para que la probabilidad de obtener al menos una blanca sea $\frac{29}{30}$, y cuántas hacen falta para que esa probabilidad sea 1.

La urna contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Usaremos **B** para "sale blanca" y **N** para "sale negra". Como no se devuelve ninguna bola, las probabilidades cambian después de cada extracción. En el árbol, cada rama muestra el color y su probabilidad **en ese momento**; al seguir un camino, multiplicamos las probabilidades de sus ramas.

Para tres extracciones, el árbol completo queda así. Las etiquetas se sitúan en recuadros opacos junto a cada rama, y a la derecha se identifica el camino terminado y su probabilidad.



Comprobamos también el resultado directamente con el camino que no contiene ninguna blanca:

$$P(\text{tres negras}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}.$$

Por el suceso contrario,

$$P(\text{al menos una blanca en 3 extracciones}) = 1 - P(\text{tres negras}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}.$$

Dos extracciones no bastan, pues

$$P(\text{al menos una blanca en 2 extracciones}) = 1 - \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15} \neq \frac{29}{30}.$$

Al añadir extracciones, la probabilidad de haber visto al menos una blanca no disminuye; por eso tres es el número que produce el valor pedido.

Para que la probabilidad sea 1, hay que extraer al menos cinco bolas. Con cuatro extracciones todavía puede ocurrir que las cuatro sean negras:

$$P(\text{cuatro negras}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{210} > 0.$$

En cambio, la urna solo tiene cuatro negras; al extraer cinco bolas necesariamente aparece una blanca.

Conclusión.

Para obtener $\frac{29}{30}$, se extraen 3 bolas; para obtener probabilidad 1, se extraen 5.