

Resolución de los seis ejercicios, incluidos todos los apartados optativos.

Ejercicio 1

El dominio físico es $t \geq 0$. Derivamos la potencia para hallar el máximo:

$$P'(t) = \frac{4(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

La derivada es positiva en $[0, 1)$ y negativa para $t > 1$, así que la potencia máxima se alcanza a $t = 1$ año. Su valor es

$$P(1) = 2 \text{ W}.$$

La energía acumulada en tres años se obtiene integrando la potencia:

$$E(3) = \int_0^3 \frac{4x}{1+x^2} dx = 2 \int_0^3 \frac{2x}{1+x^2} dx = 2[\ln(1+x^2)]_0^3 = 2 \ln 10 \text{ W}\cdot\text{año}.$$

Ejercicio 2

Sean A, B, C los precios de cada tipo. Las condiciones del descuento y del precio sin descuento se traducen en

$$0.9A + 0.8B + 0.8C = 66, \quad 3A + 4B = 140, \quad C = 2A.$$

Sustituimos $C = 2A$ en la primera ecuación: $2.5A + 0.8B = 66$. Al resolver junto con la segunda, obtenemos $A = 20$ y $B = 20$; por tanto, $C = 40$.

El coste pedido en el apartado a se obtiene sustituyendo los precios hallados:

$$3A + 8C = 3 \cdot 20 + 8 \cdot 40 = 380 \text{ €}.$$

Los precios unitarios son

$$A = 20 \text{ €, } B = 20 \text{ €, } C = 40 \text{ €}.$$

Ejercicio 3.1

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_a = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 2 \\ 0 & 4 & 3-a \end{pmatrix}, \quad A_a^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & a^2 \\ 0 & 1-a & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3-a & a-5 \end{array} \right).$$

El determinante de A_a es $3(a-5)(a+1)$. Si $a \neq 5, -1$, el determinante no es cero, luego $\text{rg}(A_a) = \text{rg}(A_a^*) = 3$ y, por Rouché-Frobenius, el sistema es SCD.

Para $a = 5$, el menor $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -12$ muestra que $\text{rg}(A_a) \geq 2$. Las dos últimas filas de la matriz ampliada son opuestas, por lo que $\text{rg}(A_a) = \text{rg}(A_a^*) = 2 < 3$. Por Rouché-Frobenius, el sistema es SCl.

Para $a = -1$, el menor $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$ vuelve a dar $\text{rg}(A_a) = 2$. Las dos últimas filas tienen coeficientes proporcionales, pero términos independientes 0 y -6 que no guardan esa proporción; al ampliar la matriz, el rango sube a 3. Así, $\text{rg}(A_a) \neq \text{rg}(A_a^*)$ y el sistema es SI.

Cuando $a = 0$, resolvemos:

$$3x - y = 0, \quad y + 2z = 0, \quad 4y + 3z = -5.$$

De las dos primeras, $y = 3x$ y $z = -3x/2$. Sustituyendo en la tercera, $-15x/2 = -5$, luego $x = -2/3$, $y = -2$ y $z = 1$. La solución es $(x, y, z) = (-2/3, -2, 1)$.

Ejercicio 3.2

Sea A la matriz del enunciado y $\det A = -2$.

a) La matriz pedida se construye a partir de las filas de A como $-F_3$, $F_1 - F_2$ y $4F_2$. La transformación de filas tiene matriz

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det T = -4.$$

Así, su determinante es $\det(T) \det(A) = (-4)(-2) = \boxed{8}$.

b) Usando las propiedades del determinante,

$$\det(A^{-1}(A^t)^2 A) = \frac{1}{\det A} (\det A)^2 \det A = (\det A)^2 = \boxed{4}.$$

Ejercicio 4.1

La primitiva se obtiene con el cambio sugerido $t = e^x$, $dt = e^x dx$:

$$\int \frac{8e^x - 4e^{2x}}{1 + e^x} dx = \int \frac{8 - 4t}{1 + t} dt = \int \left(-4 + \frac{12}{1 + t} \right) dt.$$

Por tanto, $F(x) = -4e^x + 12 \ln(1 + e^x) + C$. La tangente en $x = 0$ debe ser $y = 2x + 12 \ln 2$, así que $F(0) = 12 \ln 2$. Esto da $C = 4$. La primitiva pedida es

$$\boxed{F(x) = 4 - 4e^x + 12 \ln(1 + e^x)}.$$

Ejercicio 4.2

Si se transfiere una moneda de plata, la segunda bolsa contiene 6 monedas de oro entre 10 monedas; por ello,

$$P(\text{oro en la segunda} \mid \text{plata transferida}) = \frac{6}{10} = \boxed{\frac{3}{5}}.$$

Para invertir la condición, llamamos S al suceso «se transfirió plata» y O a «la segunda moneda es de oro». Los caminos que terminan en oro tienen probabilidades

$$P(S \cap O) = \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{25}, \quad P(S^c \cap O) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{25}.$$

Así, $P(O) = 16/25$ y, por Bayes,

$$P(S \mid O) = \frac{P(S \cap O)}{P(O)} = \frac{9/25}{16/25} = \boxed{\frac{9}{16}}.$$