

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas

Problema 1. Una agencia inmobiliaria tiene tres locales en alquiler, por los que ha cobrado en total 1650 euros en este mes. La agencia ha pagado al propietario del primer local el 95% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; al propietario del segundo local, el 90% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; y al propietario del tercer local, el 80% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 euros de ganancia. Se sabe también que el alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos. ¿Cuántos euros cobra la agencia por cada uno de los tres locales que tiene en alquiler?

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Solución:

Llamando: x = euros cobrados de alquiler al primer local
 y = euros cobrados de alquiler al segundo local
 z = euros cobrados de alquiler al tercer local

Del enunciado del problema obtenemos:

La agencia cobra en total 1650€, $x + y + z = 1650$

La agencia paga al propietario del primer local el 95%, al propietario del segundo local el 90% y al propietario del tercer local el 80% de lo cobrado, respectivamente, por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 euros de ganancia. $1650 - (0'95x + 0'90y + 0'80z) = 132$

El alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos, $x = 2(y + z)$

Arreglamos las dos última ecuaciones,

$$1650 - (0'95x + 0'90y + 0'80z) = 132; \quad 1650 - 132 = 0'95x + 0'90y + 0'80z;$$

$$0'95x + 0'90y + 0'80z = 1518$$

$$x = 2(y + z); \quad x = 2y + 2z; \quad x - 2y - 2z = 0$$

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y + z = 1650 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 0'95x + 0'90y + 0'80z = 1518 \end{cases}$$

Lo resolveremos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0'95 & 0'90 & 0'80 & 1518 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - 0'95 F_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 0 & -3 & -3 & -1650 \\ 0 & -0'05 & -0'15 & -49'5 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 / (-0'05)]{F_2 / (-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 0 & 1 & 1 & 550 \\ 0 & 1 & 3 & 990 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 0 & 1 & 1 & 550 \\ 0 & 0 & 2 & 440 \end{array} \right)$$

$$\text{De } F_3 \rightarrow 2z = 440 \rightarrow z = \frac{440}{2} = 220$$

$$\text{De } F_2 \rightarrow y + z = 550 \rightarrow y + 220 = 550 \rightarrow y = 550 - 220 = 330$$

$$\text{De } F_1 \rightarrow x + y + z = 1650 \rightarrow x + 330 + 220 = 1650 \rightarrow x + 550 = 1650 \rightarrow x = 1650 - 550 = 1100$$

Solución: la agencia cobra 1100€ por el primer local, 330€ por el segundo y 220€ por el tercero.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Una empresa apícola vende dos tipos de cajas con tres variedades de miel en cada una: miel de romero, miel de azahar y miel multifloral. La caja de tipo A contiene 2 tarros de miel de romero, 2 de azahar y 1 de multifloral. La caja de tipo B contiene 1 tarro de miel de romero, 2 de azahar y 2 de multifloral. Cada día la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero, 300 de miel de azahar y 250 de miel multifloral. Con cada caja de tipo A obtiene un beneficio de 7 euros y con cada caja de tipo B obtiene un beneficio de 5 euros.

- a) ¿Cuántas cajas de cada tipo debe comercializar para obtener un beneficio máximo? (8 puntos)
- b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (2 puntos)

Solución:

Llamando: $x = n^{\circ}$ de cajas del tipo A

$y = n^{\circ}$ de cajas del tipo B

Los datos del problema los resumimos en la tabla:

Caja	Tarros de miel			Beneficio euros/caja
	romero	azahar	multifloral	
A	2	2	1	7
B	1	2	2	5

Las restricciones serán:

“la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero” $\rightarrow 2x + y \leq 280$

“la empresa dispone de 300 tarros de miel de azahar” $\rightarrow 2x + 2y \leq 300$

“la empresa dispone de 250 tarros de miel multifloral” $\rightarrow x + 2y \leq 250$

Como las variables x e y representan sacos, deben ser números naturales.

El beneficio viene dado por la función: $z = 7x + 5y$

El problema a resolver es:

minimizar $z = 7x + 5y$

$$s.a. \begin{cases} 2x + y \leq 280 \\ 2x + 2y \leq 300 \\ x + 2y \leq 250 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$$2x + y \leq 280$$

$$2x + y = 280$$

x	y
0	280
$\frac{280}{2} = 140$	0

¿(0,0) cumple?

$$2 \cdot 0 + 0 \leq 280 \quad \text{Sí}$$

$$2x + 2y \leq 300$$

$$2x + y = 300$$

x	y
0	300
$\frac{300}{2} = 150$	0

¿(0,0) cumple?

$$2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 300 \quad \text{Sí}$$

$$x + 2y \leq 250$$

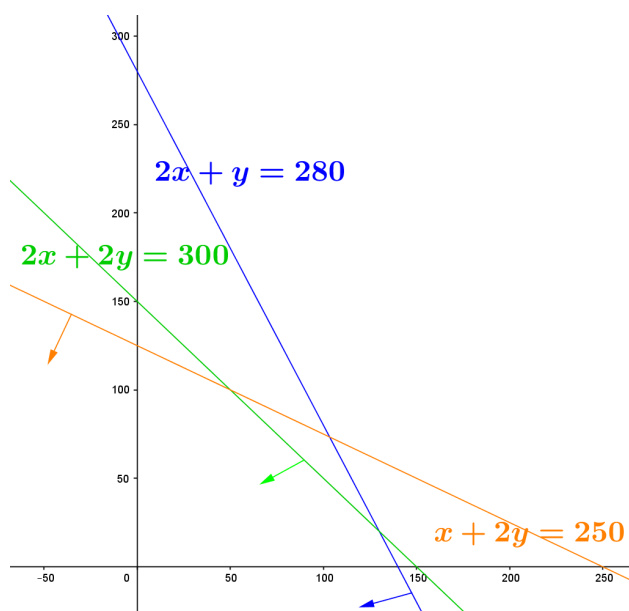
$$x + y = 250$$

x	y
0	$\frac{250}{2} = 125$
250	0

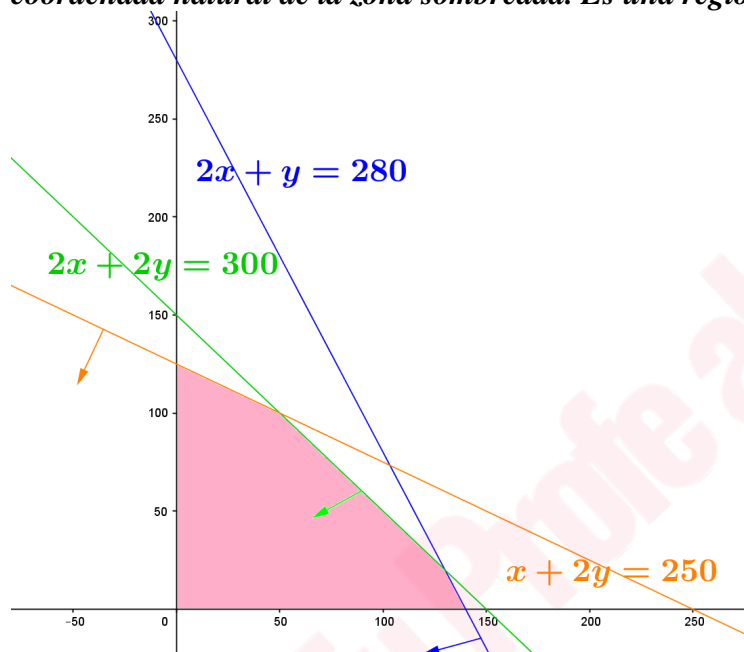
¿(0,0) cumple?

$$0 + 2 \cdot 0 \leq 250 \quad \text{Sí}$$

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada. Es una región factible cerrada.



Vértices de la región factible:

El $(0, 0)$; el del eje horizontal y vertical los obtuvimos en los cálculos para la representación: $(140, 0)$ y $(0, 125)$. Faltan los puntos de corte entre las rectas.

Corte entre las rectas:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 300 \\ x + 2y = 250 \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones: $x = 50$

Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación,

$$50 + 2y = 250; \quad 2y = 250 - 50; \quad 2y = 200; \quad y = 100$$

Luego punto de corte $(50, 100)$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 300 \\ 2x + y = 280 \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones: $y = 20$

Sustituyendo el valor de y en la 2ª ecuación,

$$2x + 20 = 280; \quad 2x = 280 - 20; \quad 2x = 260; \quad x = 130$$

Luego punto de corte $(130, 20)$

Los vértices de la región factible son: $(0, 0)$, $(0, 125)$, $(50, 100)$, $(130, 20)$ y $(140, 0)$.

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 7x + 5y$	
$0, 0$	$7 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$	
$0, 125$	$7 \cdot 0 + 5 \cdot 125 = 625$	
$50, 100$	$7 \cdot 50 + 5 \cdot 100 = 850$	
$130, 20$	$7 \cdot 130 + 5 \cdot 20 = 1010$	máximo
$140, 0$	$7 \cdot 140 + 5 \cdot 0 = 9800$	

El máximo se alcanza en el punto $(130, 20)$

Por tanto,

- Para obtener un beneficio máximo diariamente debe comercializar 130 cajas del tipo A y 20 del tipo B.
- El beneficio máximo será de 1010€ al día.

Tu Profe al Rescate

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2}$, se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Solución:

a) Dominio,

$$(x+1)^2 = 0 \rightarrow x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \rightarrow f(0) = \frac{0^2+0-2}{(0+1)^2} = \frac{-2}{1} = -2 \rightarrow (0, -2)$$

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}=0 \rightarrow x^2+x-2=0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases} \rightarrow (-2, 0) \text{ y } (1, 0)$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: $(0, -2)$, $(1, 0)$ y $(-2, 0)$.

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1) = 1$$

, la asíntota horizontal es $y = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1) = 1$$

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que hay la posible A.V. es $x = -1$,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2} = \frac{(-1)^2 + (-1) - 2}{(-1+1)^2} = \frac{-2}{0} = \infty \rightarrow x = -1 \text{ es A.V.}$$

La asíntota horizontal es $y = 1$ y la asíntota vertical es $x = -1$.

c) Monotonía.

Estudiamos el signo de $f'(x)$

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1) \cdot (x+1)^2 - (x^2 + x - 2) \cdot 2(x+1)}{[(x+1)^2]^2} = \frac{(2x+1) \cdot (x+1)^2 - (x^2 + x - 2) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \left\{ \begin{array}{l} \text{simplificando} \\ \text{entre } (x+1) \end{array} \right\}$$

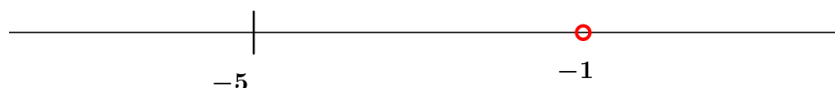
$$= \frac{(2x+1) \cdot (x+1) - (x^2 + x - 2) \cdot 2}{(x+1)^3} = \frac{2x^2 + 2x + x + 1 - 2x^2 - 2x - 4}{(x+1)^3} = \frac{x+5}{(x+1)^3}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$x+5=0 \rightarrow x=-5$$

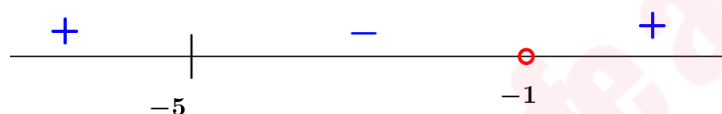
$$(x+1)^3=0 \rightarrow x+1=0 \rightarrow x=-1$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: $(\{-1\} \notin \text{Dom } f(x))$



x	$\frac{x+5}{(x+1)^3}$
-6	$\frac{-6+5}{(-6+1)^3} = +$
-2	$\frac{-2+5}{(-2+1)^3} = -$
0	$\frac{0+5}{(0+1)^3} = +$

Calculemos el signo de $f'(x)$ en cada uno de estos intervalos,



Por tanto,

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$ y $f(x)$ es decreciente en $(-5, -1)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = -5$ hay un máximo local ya que $f'(-5) = 0$ y a la izquierda la función es creciente y a la derecha decreciente. Y la función no tiene mínimos locales.

$$x = -5 \rightarrow f(0) = \frac{(-5)^2 + (-5) - 2}{(-5+1)^2} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8} = 1.125$$

La función tiene un máximo local en el punto $\left(-5, \frac{9}{8}\right)$ y no tiene mínimos locales.

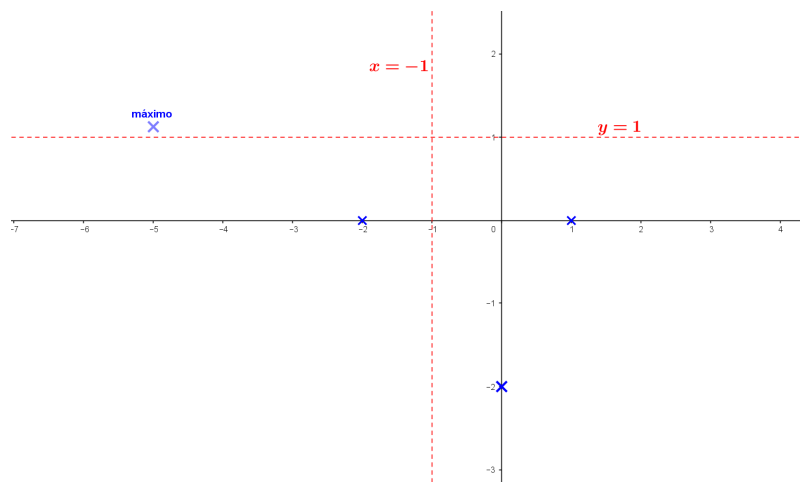
e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $(0, -2)$, $(1, 0)$ y $(-2, 0)$, máximo local en $\left(-5, \frac{9}{8}\right)$; a.h. $y = 1$,

a.v. $x = -1$.

Representando gráficamente esta información:



Para completar la representación veamos la posición de la curva respecto de sus asíntotas:

A.H. $y = 1$

$$\text{En } -\infty, \quad x = -1000 \rightarrow y = \frac{(-1000)^2 - 1000 - 2}{(-1000 + 1)^2} = 1'000998...$$

$$\text{En } +\infty, \quad x = 1000 \rightarrow y = \frac{1000^2 + 1000 - 2}{(1000 + 1)^2} = 0'998...$$



A.V. $x = -1$

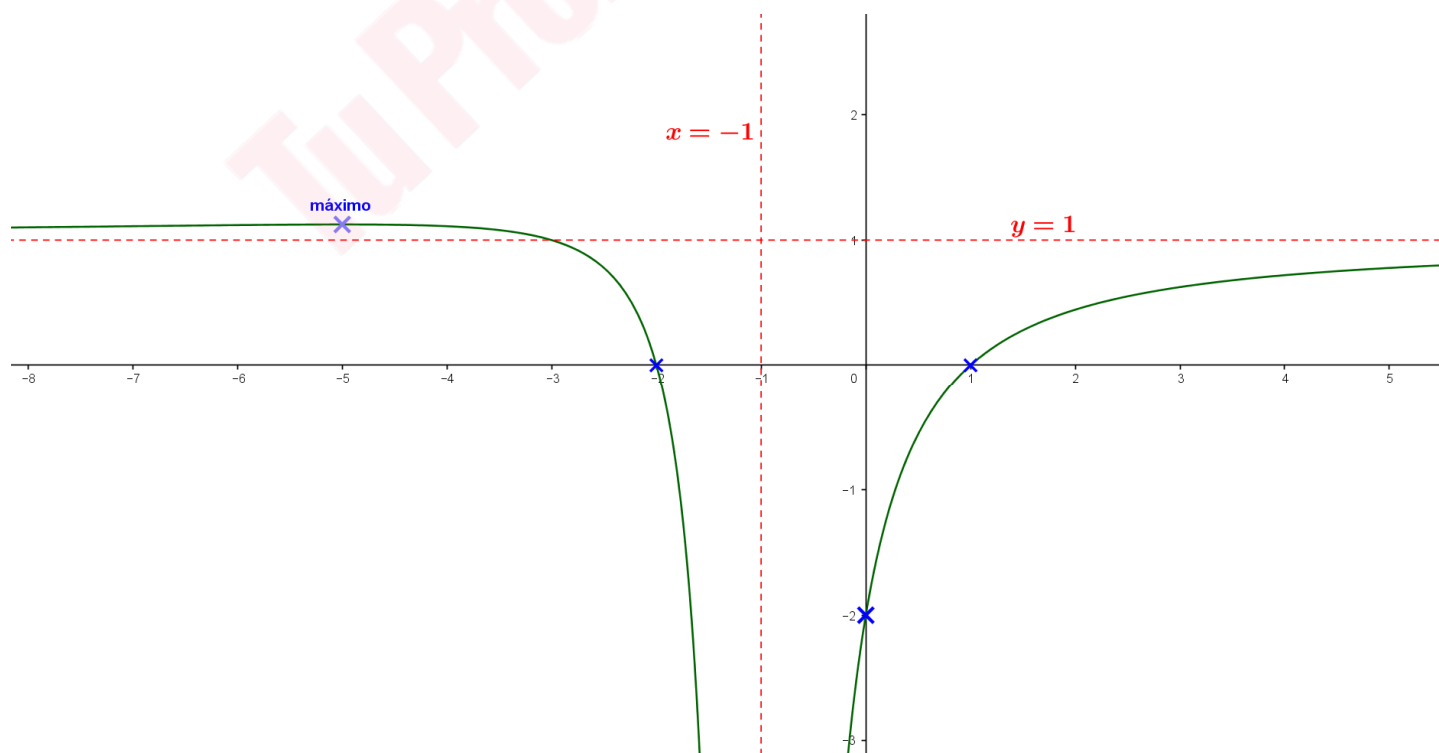
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x - 2}{(x + 1)^2} = \frac{(-1)^2 - 1 - 2}{(-1 + 1)^2} = \frac{-2}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + x - 2}{(x + 1)^2} = \frac{(-0'9)^2 - 0'9 - 2}{(-0'9 + 1)^2} = \frac{-1'91}{0} = -\infty$$

$x = -1$

$\backslash \quad /$

Considerando esta posición de la curva respecto de la a.h, la a.v y los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de $f(x)$ es:



Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. En una empresa se ha comprobado que sus beneficios están relacionados con su inversión en publicidad según la función

$$B(x) = 50000 + 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2,$$

donde x es la inversión en publicidad ($x \geq 0$) y $B(x)$ es el beneficio obtenido, ambos en euros.

- Calcula la cantidad invertida en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (4 puntos)
- Calcula los intervalos para la inversión en publicidad en los que los beneficios crecen o decrecen a medida que se invierte en publicidad. (3 puntos)
- ¿Existe un valor para la inversión en publicidad a partir del cual los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad? En caso afirmativo, determínalo. (3 puntos)

Solución:

$$B(x) = 50000 + 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2 = 50000 + 40x - \frac{x^2}{100} \quad x \geq 0$$

a) *Máximo*

$$B'(x) = 40 - \frac{2x}{100} = 40 - \frac{x}{50}$$

$$B'(x) = 0 \rightarrow 40 - \frac{x}{50} = 0; \quad 40 = \frac{x}{50}; \quad x = 2000$$

Estudiamos el signo de $B'(x)$ a ambos lados de $x = 2000$

x	$B'(x) = 40 - \frac{x}{50}$	
1000	$40 - \frac{1000}{50} = 20$	+
3000	$40 - \frac{3000}{50} = -20$	-

A la izquierda positivo y a la derecha negativo, en $x = 2000$ hay un máximo relativo que es el absoluto por ser la función $B(x)$ a la izquierda creciente y a la derecha decreciente.

$$\text{Para } x = 2000, \quad B(2000) = 50000 + 40 \cdot 2000 - \frac{2000^2}{100} = 90000$$

Para obtener un beneficio máximo hay que invertir 2000€ en publicidad. En este caso el beneficio será de 90000€.

b) De lo calculado en el apartado anterior obtenemos que $B(x)$ es creciente en el intervalo $(0, 2000)$ y decreciente en $(2000, +\infty)$.

Por tanto, los beneficios crecen para una inversión entre 0 y 2000 € y decrecen para una inversión de más de 2000 €.

c) ¿x? / $B(x) < B(0)$

$$B(x) = 50000 + 40x - \frac{x^2}{100}$$

$$B(0) = 50000 + 40 \cdot 0 - \frac{0^2}{100} = 50000$$

Resolvamos la inecuación $B(x) < B(0)$

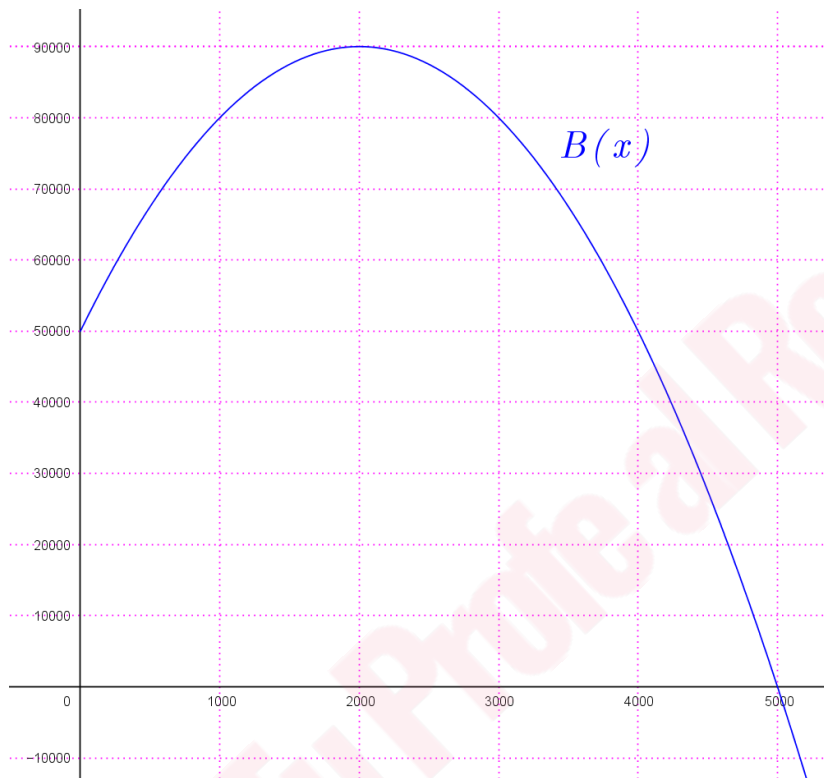
$$50000 + 40x - \frac{x^2}{100} < 50000; \quad 40x - \frac{x^2}{100} < 0; \quad 4000x - x^2 < 0$$

$$4000x - x^2 = 0; \quad x(4000 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 4000 - x = 0; \quad x = 4000 \end{cases}$$

Representemos la función $B(x)$.

Lo calculado antes nos dice que $B(x)$ pasa por los puntos $(0, 50000)$ y $(4000, 50000)$.

En el apartado a) hemos obtenido que su máximo es $(2000, 90000)$



Luego para $x > 4000$ $B(x) < 50000$

Por tanto, con una inversión en publicidad superior a 4000€ los beneficios obtenidos son menores que si no se invirtiera nada.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 5. Entre los clientes de una compañía de seguros de automóviles, un 30% tiene menos de 30 años, un 55% tiene entre 30 y 60 años, y el 15% restante tiene más de 60 años. Se sabe que, entre los clientes de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte de accidente el año pasado; entre los clientes que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte de accidente el año pasado; y entre los clientes de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte de accidente el año pasado. Seleccionamos al azar un cliente de la compañía.

- Llamemos A al suceso “el cliente seleccionado tiene más de 60 años” y llamemos B al suceso “el cliente seleccionado no presentó parte de accidente año pasado”. Calcula $P(A \cup B)$. (3 puntos)
- Llamemos C al suceso “el cliente seleccionado tiene 30 años o más” y D al suceso “el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado”. Calcula $P(C \cap D)$. (3 puntos)
- Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenga 60 años o menos. (4 puntos)

Solución:

En este problema en los datos iniciales hay unos rangos de edades pero posteriormente en los apartados hay otros. Vamos a considerar los siguientes sucesos:

M_1 = el cliente seleccionado tiene menos de 30 años
 M_2 = el cliente seleccionado tiene entre 30 y 60 años
 M_3 = el cliente seleccionado tiene más de 60 años
 B = el cliente seleccionado no presentó parte de accidentes
 D = el cliente seleccionado presentó parte de accidentes

Del enunciado del problema se deduce que:

“un 30% tiene menos de 30 años” $\rightarrow P(M_1) = 0.30$

“un 55% tiene entre 30 y 60 años” $\rightarrow P(M_2) = 0.55$

“el 15% restante tiene más de 60 años” $\rightarrow P(M_3) = 0.15$

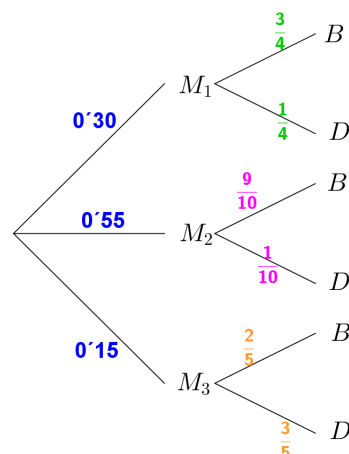
“entre los de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte” $\rightarrow P\left(\frac{B}{M_1}\right) = \frac{3}{4}$ y $P\left(\frac{D}{M_1}\right) = \frac{1}{4}$

“entre los que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte” $\rightarrow P\left(\frac{B}{M_2}\right) = \frac{9}{10}$ y

$P\left(\frac{D}{M_2}\right) = \frac{1}{10}$

“entre los de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte” $\rightarrow P\left(\frac{B}{M_3}\right) = \frac{2}{5}$ y $P\left(\frac{D}{M_3}\right) = \frac{3}{5}$

El árbol del problema será:



- a) Llamamos $A = \text{"el cliente seleccionado tiene más de 60 años"} = M_3$
 Debemos calcular $P(A \cup B) = P(M_3 \cup B)$

$$P(M_3 \cup B) = P(M_3) + P(B) - P(M_3 \cap B)$$

Del árbol del problema obtenemos:

$$P(M_3) = 0.15; \quad P(B) = 0.30 \frac{3}{4} + 0.55 \frac{9}{10} + 0.15 \frac{2}{5} = \frac{39}{50} = 0.78; \quad P(M_3 \cap B) = 0.15 \frac{2}{5} = 0.06$$

$$\text{y } P(M_3 \cup B) = 0.15 + 0.78 - 0.06 = 0.87$$

Respuesta: $P(A \cup B) = 0.87$.

- b) Llamamos $C = \text{"el cliente seleccionado tiene más de 30 o más años"} = M_2 \cup M_3$
 Debemos calcular $P(C \cap D) = P[(M_2 \cup M_3) \cap D] = P[(M_2 \cap D) \cup (M_3 \cap D)] =$

$$= P(M_2 \cap D) + P((M_3 \cap D)) - P[(M_2 \cap D) \cap (M_3 \cap D)]^*$$

Por definición M_2 y M_3 son sucesos incompatibles, se refieren a rangos de edades diferentes, y por tanto $M_2 \cap M_3 = \emptyset$, luego $P[(M_2 \cap D) \cap (M_3 \cap D)] = 0$

Las otras dos probabilidades las obtenemos del árbol del problema,

$$^* = 0.55 \frac{1}{10} + 0.15 \frac{3}{5} = 0.145.$$

Solución: $P(C \cap D) = 0.145$.

- c) Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenga 60 años o menos.

La probabilidad pedida es $P\left(\frac{M_1 \cup M_2}{D}\right)$

Por definición de los sucesos M_1, M_2 y M_3 , M_3 es el complementario de $M_1 \cup M_2$

Por tanto,

$$P\left(\frac{M_1 \cup M_2}{D}\right) = 1 - P\left(\frac{M_3}{D}\right) = 1 - \frac{P(M_3 \cap D)}{P(D)} = 1 - \frac{0.15 \frac{3}{5}}{0.30 \frac{1}{4} + 0.55 \frac{1}{10} + 0.15 \frac{3}{5}} = 1 - \frac{9}{22} = \frac{13}{22} = 0.59090...$$

Solución: $P\left(\frac{M_1 \cup M_2}{D}\right) = \frac{13}{22} \cong 0.5909$.

El cálculo directo sería:

$$P\left(\frac{M_1 \cup M_2}{D}\right) = \frac{P[(M_1 \cup M_2) \cap D]}{P(D)} = \{\text{el desarrollo del numerados es similar al realizado en el}$$

$$\text{apartado a) y quedaría}\} \frac{P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{0.30 \frac{1}{4} + 0.55 \frac{1}{10}}{0.30 \frac{1}{4} + 0.55 \frac{1}{10} + 0.15 \frac{3}{5}} = \frac{13}{22}$$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

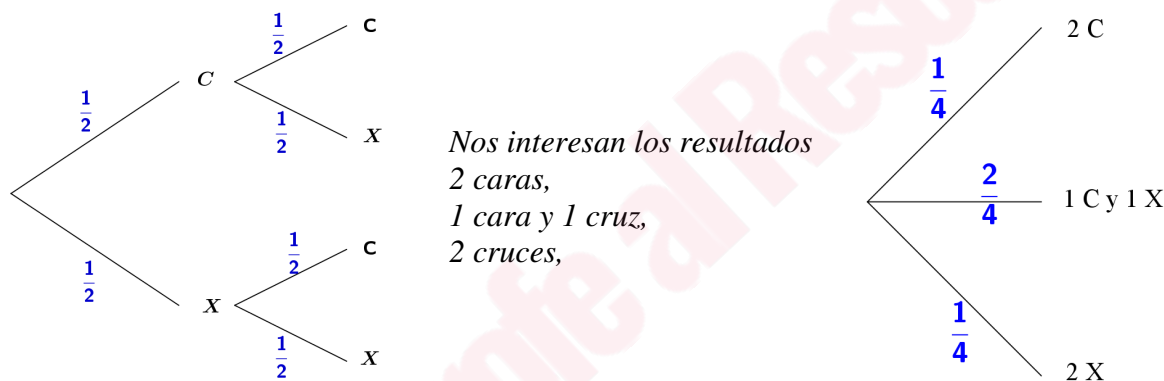
Problema 6. En un juego se lanzan dos monedas equilibradas y un dado de seis caras equilibrado. Un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien, si obtiene exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

- Calcula la probabilidad de que el jugador gane. (2'5 puntos)
- Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas? (2'5 puntos)
- Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera un cinco al lanzar el dado? (2'5 puntos)
- Llamemos A al suceso “el jugador no gana” y llamemos B al suceso “el jugador obtiene un seis al lanzar el dado”. ¿Son independientes los sucesos? (2'5 puntos)

Solución:

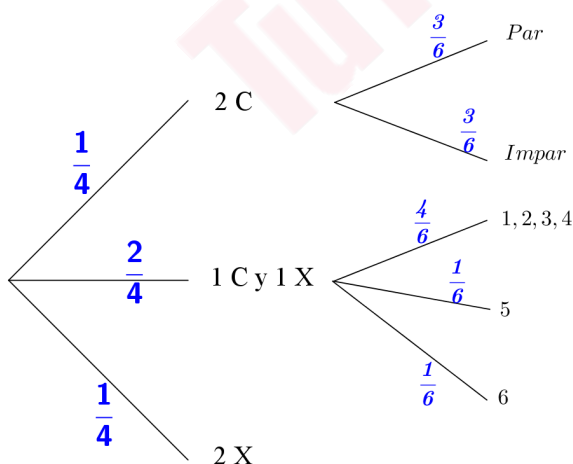
Este problema consiste en lanzar dos monedas y un dado, directamente su árbol sería bastante grande (24 resultados). Ahora bien, considerando las condiciones en que se gana podremos simplificar el árbol.

Veamos el árbol del lanzamiento de dos monedas,



Del resultado del dado no interesa, cuando salen dos caras si es par o no y cuando sale una cara que sea 5 o 6. Cuando salen dos cruces no interesa el resultado del dado.

Por tanto el árbol “completo” sería:



- Probabilidad de que el jugador gane.

El jugador gana cuando obtiene dos caras y número par o una sola cara y 5 o 6.

$$P(\text{ganar}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{24} + \frac{2}{24} + \frac{2}{24} = \frac{7}{24}$$

Respuesta: la probabilidad de que el jugador gane es $7/24$.

b) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

La probabilidad pedida es: $P(2C/ganar)$

$$P(2C/ganar) = \frac{P(2C \cap ganar)}{P(ganar)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6}}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{3}{24}}{\frac{7}{24}} = \frac{3}{7}$$

La probabilidad pedida es 3/7.

c) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera un cinco al lanzar el dado?

La probabilidad pedida es: $P(\text{obtener } 5/ganar)$

$$P(\text{obtener } 5/ganar) = \frac{P(\text{obtener } 5 \cap ganar)}{P(ganar)} = \frac{\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{2}{24}}{\frac{7}{24}} = \frac{2}{7}$$

La probabilidad pedida es 2/7.

d) Llamemos A al suceso “el jugador no gana” y llamemos B al suceso “el jugador obtiene un seis al lanzar el dado”. ¿Son independientes los sucesos?

Estos dos sucesos serán independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A) = 1 - P(\text{ganar}) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}, \quad P(B) = \frac{1}{6}$$

Al obtener un 6 en el dado para que no gane tienen que salir 2 cruces en las monedas, por tanto

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = \frac{1}{24} \\ P(A) \cdot P(B) = \frac{17}{24} \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{144} \end{array} \right\} \rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.