

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan ambas para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

La función debe ser continua en $x = 0$. El límite por la izquierda vale k , mientras que por la derecha usamos el límite notable $\lim_{u \rightarrow 0} (e^u - 1)/u = 1$, con $u = x^2$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1.$$

Por tanto, $k = 1$.

En $x = 1$ se usa la rama $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x^2}$. Su valor y derivada son

$$f(1) = e - 1, \quad f'(x) = \frac{2((x^2 - 1)e^{x^2} + 1)}{x^3}, \quad f'(1) = 2.$$

La ecuación punto-pendiente de la tangente queda

$$y - (e - 1) = 2(x - 1) \implies \boxed{y = 2x + e - 3}.$$

Opción A - Ejercicio 2

Aplicamos el cambio $t = \sqrt{1-x}$, de modo que $x = 1 - t^2$ y $dx = -2t dt$. Los límites pasan de $x = 0, 1$ a $t = 1, 0$:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^0 \frac{1-t^2}{1+t} (-2t) dt = \int_0^1 \frac{2t(1-t^2)}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 2t(1-t) dt = \left[t^2 - \frac{2}{3}t^3 \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Opción A - Ejercicio 3

De la tercera ecuación, $x = y - 1$. Al sustituir en las otras dos, ambas se reducen a la misma condición:

$$k(y - 1) + 2y = 2 \iff 2(y - 1) + ky = k \iff (k + 2)(y - 1) = 0.$$

Esto demuestra que el sistema es compatible para cualquier k . Si $k \neq -2$, necesariamente $y = 1$, $x = 0$ y el sistema es compatible determinado. Si $k = -2$, las dos primeras ecuaciones son consecuencias de la tercera, así que hay infinitas soluciones y el sistema es compatible indeterminado:

$$\begin{cases} k \neq -2 : & (x, y) = (0, 1), \\ k = -2 : & (x, y) = (t, t + 1), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Opción A - Ejercicio 4

Restamos las coordenadas de los puntos para obtener dos vectores del plano:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 0, -2), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 1, -3).$$

Un vector normal es su producto vectorial, $(2, 3, 1)$. Usando el punto $A(0, 0, 1)$, la ecuación del plano es

$$\boxed{\pi : 2x + 3y + z - 1 = 0}.$$

El punto $D(1, 2, 0)$ no pertenece al plano, pues $2 + 6 + 0 - 1 = 7 \neq 0$; luego los cuatro puntos no son coplanarios. La distancia de D al plano se calcula con

$$d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

El dominio de $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Al acercarnos a $x = 1$, el numerador tiende a $e^{-1} > 0$ y el denominador cambia de signo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty.$$

Así, $x = 1$ es una asíntota vertical. En los infinitos,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

La asíntota horizontal por la derecha es $y = 0$; por la izquierda no hay horizontal. Tampoco hay asíntota oblicua, pues al tender x a $-\infty$, $f(x)/x$ no tiene límite finito.

Para estudiar el crecimiento, derivamos:

$$f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}.$$

El denominador y e^{-x} son positivos en el dominio, de modo que el signo de f' es el de x . La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$. En $x = 0$ cambia de decreciente a creciente, por lo que hay un mínimo relativo de valor $f(0) = 1$. No hay máximo relativo.

Opción B - Ejercicio 2

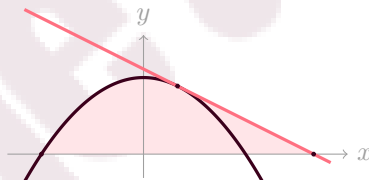
La función es $f(x) = \frac{9-x^2}{4}$. En $x = 1$, $f(1) = 2$ y $f'(1) = -\frac{1}{2}$, así que la tangente es

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \implies y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}.$$

La recta dada es $y = (5-x)/2$. Corta al eje x en $x = 5$ y la parábola corta ese eje en $x = \pm 3$. Para hallar dónde se encuentran la recta y la parábola, resolvemos

$$\frac{9-x^2}{4} = \frac{5-x}{2} \iff -(x-1)^2 = 0,$$

por lo que son tangentes en $(1, 2)$. Las tres curvas delimitan el recinto entre el arco de la parábola desde $(-3, 0)$ hasta $(1, 2)$, el segmento de recta hasta $(5, 0)$ y el eje x :



En $[-3, 1]$ la parábola queda sobre el eje x , y en $[1, 5]$ la recta queda sobre el eje. Sumamos las dos integrales para hallar el área:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-3}^1 \frac{9-x^2}{4} dx + \int_1^5 \frac{5-x}{2} dx \\ &= \left[\frac{9x}{4} - \frac{x^3}{12} \right]_{-3}^1 + \left[\frac{5x}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_1^5 \\ &= \frac{20}{3} + 4 = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_\lambda^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda & 0 \end{array} \right).$$

Su determinante es $\det A_\lambda = 2\lambda(\lambda + 1)$. Si $\lambda \neq 0, -1$, ambos rangos son 3 y el sistema es compatible determinado.

Para $\lambda = 0$, las ecuaciones primera y tercera dan $x - y = 0$ y $-x - y = 0$. De ellas $x = y = 0$, mientras que z queda libre. Los rangos son $\text{rg}(A_0) = \text{rg}(A_0^*) = 2 < 3$, así que el sistema es compatible indeterminado:

$$(x, y, z) = (0, 0, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $\lambda = -1$, las dos primeras ecuaciones dan $x - y = -1$ y $-2y - z = -1$; la tercera es consecuencia de ellas. El sistema vuelve a tener rango 2 en ambas matrices y es compatible indeterminado. Tomando $y = t$,

$$(x, y, z) = (t - 1, t, 1 - 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Escribimos la recta de intersección de $x - z = 0$ y $x + y + 2 = 0$ en forma paramétrica:

$$r: \quad x = t, \quad y = -2 - t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Un punto de r es $R_0 = (0, -2, 0)$ y un vector director es $\vec{v} = (1, -1, 1)$. El pie H de la perpendicular desde $P = (2, 1, -5)$ a r tiene la forma $H = R_0 + s\vec{v}$ y cumple $(P - H) \cdot \vec{v} = 0$. De manera equivalente,

$$s = \frac{(P - R_0) \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} = \frac{(2, 3, -5) \cdot (1, -1, 1)}{3} = -2, \quad H = (-2, 0, -2).$$

La reflexión respecto de una recta deja fijo el pie H , que es el punto medio entre P y su simétrico P' . Así,

$$P' = 2H - P = (-6, -1, 1).$$