

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de junio de 2011

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Rango y discusión de sistemas

La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

a) Rango según a . Calculamos el determinante:

$$\det A = -(a-2)(a+2).$$

Si $a \neq \pm 2$, el determinante es no nulo y el rango es 3. Para $a = 2$ o $a = -2$, el determinante vale cero, pero el menor de las dos primeras filas y columnas primera y segunda es

$$\begin{vmatrix} 2a & -2 \\ -1 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 2,$$

que vale 6 en ambos casos. Así, el rango es 2 para $a = \pm 2$. **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 3$ si $a \neq \pm 2$ y $\text{rg}(A) = 2$ si $a = \pm 2$.

b) Caso $a = 2$. El sistema tiene matriz de coeficientes

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y término independiente $(2, 1, b)^T$. La tercera fila de coeficientes es combinación de las dos primeras:

$$6F_3 = 5F_1 + 8F_2.$$

Para que la matriz ampliada conserve rango 2, los términos independientes deben cumplir la misma relación: $6b = 5 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 18$, luego $b = 3$. Si $b \neq 3$, los rangos de A_2 y de la ampliada difieren y el sistema es incompatible. Si $b = 3$, tomamos $z = t$ y resolvemos las dos primeras ecuaciones; se obtiene $y = 1$ y $x = 1 - t$. **Conclusión.** Si $b = 3$, el sistema es SCI y sus soluciones son $(1 - t, 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$; si $b \neq 3$, es SI.

c) Caso $a = 1$. El determinante es distinto de cero, así que hay solución única. Sustituyendo $a = 1$ y resolviendo,

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = -1, \\ -x + y - z = 2, \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \implies (x, y, z) = (2, 1, -3).$$

Conclusión. La solución es $(2, 1, -3)$.

Opción A - Ejercicio 2. Volumen y perpendicular común

a) **Volumen del tetraedro.** La recta r_1 es el eje $x = y = z$; su intersección con π cumple $12x = 24$, y es $P_1 = (2, 2, 2)$. Las otras dos rectas son los ejes coordenados x e y : sus intersecciones con el plano son $P_2 = (12, 0, 0)$ y $P_3 = (0, 8, 0)$. El cuarto vértice es el origen.

El volumen de un tetraedro con tres aristas concurrentes $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ es $\frac{1}{6} |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$. Con los vectores de posición de P_1, P_2, P_3 :

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 12 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{192}{6} = 32.$$

Conclusión. El volumen del tetraedro es 32 unidades cúbicas.

b) **Recta perpendicular común.** Escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r_4 : (x, y, z) = (-1, 5, -1) + t(1, 2, -2), \quad r_5 : (x, y, z) = (0, -1, 1) + s(2, 3, -1).$$

Una dirección perpendicular a ambas es el producto vectorial de sus vectores directores:

$$(1, 2, -2) \times (2, 3, -1) = (4, -3, -1).$$

Buscamos puntos $R \in r_4$ y $S \in r_5$ tales que $\overrightarrow{RS}$ sea perpendicular a ambas direcciones. Al imponer los dos productos escalares nulos se obtienen $t = -\frac{15}{13}$ y $s = \frac{6}{13}$; por tanto,

$$R = \left(-\frac{28}{13}, \frac{35}{13}, \frac{17}{13}\right), \quad S = \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}, \frac{7}{13}\right).$$

En efecto, $S - R = \frac{10}{13}(4, -3, -1)$, así que el segmento común es perpendicular a ambas rectas. La recta pedida pasa por R y tiene esa dirección. **Conclusión.** $s : (x, y, z) = \left(-\frac{28}{13}, \frac{35}{13}, \frac{17}{13}\right) + \lambda(4, -3, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

Opción A - Ejercicio 3. Integral y extremos absolutos

a) Para integrar $x\sqrt{4+5x^2}$ usamos el cambio $u = 4 + 5x^2$, pues su derivada es $10x$. Así, $du = 10x dx$ y

$$\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2} dx = \frac{1}{10} \int_9^{49} u^{1/2} du = \frac{1}{15} [u^{3/2}]_9^{49} = \frac{316}{15}.$$

Conclusión. La integral vale $\frac{316}{15}$.

b) La raíz requiere $12 - 3x^2 \geq 0$, es decir, $x \in [-2, 2]$. En ese intervalo la función es no negativa y depende de x^2 : su máximo se obtiene cuando x^2 es mínimo, en $x = 0$, y su mínimo cuando x^2 alcanza 4, en los extremos. Evaluando:

$$f(0) = 2\sqrt{3}, \quad f(-2) = f(2) = 0.$$

Conclusión. El máximo absoluto es $2\sqrt{3}$ en $x = 0$ y el mínimo absoluto es 0 en $x = \pm 2$.

Opción A - Ejercicio 4. Límite y número de raíces

a) El límite es

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}} = 1,$$

donde en el segundo paso hemos dividido el radicando entre $\sqrt{x}$. **Conclusión.** El límite vale 1.

b) Sea $F(x) = 4x^5 + 3x + m$. Es continua en $\mathbb{R}$ y

$$F'(x) = 20x^4 + 3 > 0$$

para todo real, de modo que es estrictamente creciente. Además, $F(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$. Por el teorema de Bolzano existe al menos una raíz; al ser F estrictamente creciente, no puede tener más de una. **Conclusión.** Para cualquier $m \in \mathbb{R}$, la ecuación tiene exactamente una raíz real.

Opción B - Ejercicio 1. Extremos y asíntotas

La función $f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3} = ax + \frac{1}{x^3}$ tiene dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pues el denominador no puede anularse.

a) **Valor de a y otros extremos.** Para que haya un mínimo relativo en $x = 1$, la derivada debe anularse allí:

$$f'(x) = a - \frac{3}{x^4}, \quad f'(1) = a - 3 = 0 \implies a = 3.$$

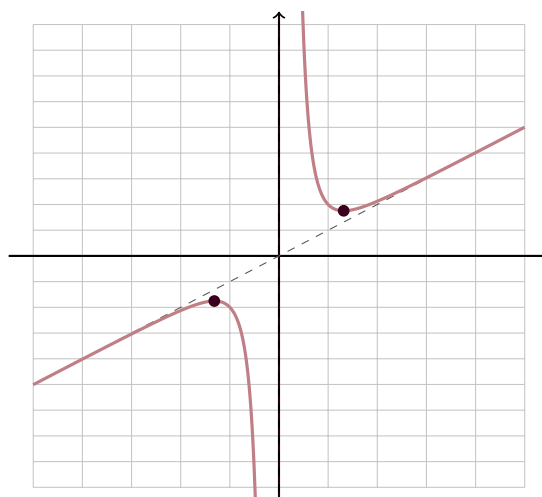
Con este valor, $f''(x) = 12/x^5$ y $f''(1) = 12 > 0$, lo que confirma el mínimo. Los puntos críticos satisfacen $3 - 3/x^4 = 0$, es decir, $x = \pm 1$. El punto $x = -1$ es el otro extremo y, como $f''(-1) = -12 < 0$, es un máximo relativo. **Conclusión.** El parámetro es $a = 3$ y el otro extremo relativo es el máximo en $(-1, -4)$.

b) **Asíntotas para $a = 1$.** Ahora $f(x) = x + 1/x^3$. Como $1/x^3$ diverge en cero, $x = 0$ es asíntota vertical. Para estudiar la asíntota oblicua calculamos su pendiente y ordenada:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$$

La oblicua es $y = x$. No hay horizontal: $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

c) **Esbozo para $a = 1$.** Los puntos críticos se obtienen de $1 - 3/x^4 = 0$, luego $x = \pm\alpha$, donde $\alpha = \sqrt[4]{3}$. El signo de f' es positivo si $|x| > \alpha$ y negativo si $0 < |x| < \alpha$. Por tanto, crece en $(-\infty, -\alpha)$ y $(\alpha, +\infty)$, y decrece en $(-\alpha, 0)$ y $(0, \alpha)$. Como $f(\pm\alpha) = \pm\frac{4\alpha}{3}$, hay un máximo local en $(-\alpha, -\frac{4\alpha}{3})$ y un mínimo local en $(\alpha, \frac{4\alpha}{3})$.



Conclusión. La gráfica tiene asíntotas $x = 0$ e $y = x$, un máximo local en $(-\sqrt[4]{3}, -\frac{4}{3}\sqrt[4]{3})$ y un mínimo local en $(\sqrt[4]{3}, \frac{4}{3}\sqrt[4]{3})$.

Opción B - Ejercicio 2. Discusión y resolución matricial

La matriz de coeficientes y el vector de términos independientes son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}.$$

El determinante es $\det A = -m(m-2)^2$. Si $m \neq 0, 2$, es no nulo, así que el sistema es compatible determinado. Para $m = 0$, las dos primeras ecuaciones son opuestas y la tercera es independiente; sus términos independientes cumplen la misma relación. Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es SCl. Para $m = 2$, el rango de A es 1, mientras que la tercera ecuación tiene coeficientes nulos y término independiente 4; por ello $\text{rg}(A^*) = 2$ y el sistema es incompatible. **Conclusión.** Es SCD si $m \neq 0, 2$, SCl si $m = 0$ y SI si $m = 2$.

Para $m = 0$, las ecuaciones independientes son $y - z = 0$ y $-2x = 2$. Tomando $z = t$, queda

$$(x, y, z) = (-1, t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $m = 1$, el sistema es $y = 1$, $z = 1$ y $-x = 3$, de modo que **Conclusión.** Si $m = 0$, las soluciones son $(-1, t, t)$; si $m = 1$, la solución única es $(-3, 1, 1)$.

Opción B - Ejercicio 3. Posición relativa y recta de intersección

Los vectores normales de los planos son $\vec{n}_1 = (2, 1, -2)$ y $\vec{n}_2 = (1, -1, 2)$. No son proporcionales, por lo que los planos se cortan en una recta. Su dirección es perpendicular a ambos normales y se obtiene mediante el producto vectorial:

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (0, -6, -3) \sim (0, 2, 1).$$

Para hallar un punto común, resolvemos las dos ecuaciones. Tomando $z = 0$, se obtiene $2x + y = 1$ y $x - y = 1$, cuyas soluciones son $x = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{1}{3}$. **Conclusión.** Los planos se cortan en la recta paramétrica $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0) + t(0, 2, 1)$.

Opción B - Ejercicio 4. Planos y volumen

a) El plano que pasa por los interceptos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ y $C = (0, 0, 1)$ tiene forma de interceptos $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$. Al multiplicar por 2: **Conclusión.** $\pi_1 : 2x + y + 2z - 2 = 0$.

b) Un plano perpendicular al vector $\vec{v} = (-2, 1, 1)$ tiene ese vector como normal. Al pasar por $P = (1, 2, 3)$:

$$-2(x - 1) + (y - 2) + (z - 3) = 0.$$

Conclusión. $\pi_2 : -2x + y + z - 3 = 0$.

c) El volumen del tetraedro es un sexto del valor absoluto del determinante de tres vectores que parten de A :

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1), \quad \overrightarrow{AP} = (0, 2, 3),$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Conclusión. El volumen del tetraedro $ABCP$ es $\frac{4}{3}$ unidades cúbicas.