

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}, \text{ donde } m \text{ es un}$$

parámetro real. Se pide:

- La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m . (4 puntos)
- La solución del sistema cuando $m = 1$. (3 puntos)
- Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

Solución:

a)

La matriz ampliada de este sistema es:
$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & m & m \end{array} \right)$$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{vmatrix} = 2m - 4 - 15 - 5 + 24 + m = 3m$$

$$3m = 0; \quad m = 0$$

Para $m \neq 0$

$|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$, y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Para $m = 0$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sería un sistema homogéneo luego compatible $\{\text{ran}(A) = \text{ran}(A')\}$.

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A ,

$$\text{En } A, \quad \left. \begin{array}{l} |2| = 2 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A') < n^\circ$ de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Por tanto, el sistema es compatible determinado para $m \neq 0$ y compatible indeterminado para $m = 0$.

b) Si $m = 1$ ($m \neq 0$), el sistema es compatible determinado.

La matriz ampliada de este nuevo sistema sería:
$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$|A| = (3m)_{m=1} = 3 \cdot 1 = 3$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1 - 3 - 1 + 12}{3} = 3;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1 + 15 - 6 - 1}{3} = 3;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2 - 4 - 5 + 1}{3} = -2$$

Si $m = 1$, la solución es:
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

c) Soluciones cuando el sistema es compatible indeterminado.

El sistema es compatible indeterminado para $m = 0$.

El sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo calculado en el apartado a). Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales x e y .

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = -z \\ x + y = -3z \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -z & -1 \\ -3z & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-z - 3z}{3} = \frac{-4z}{3} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & -3z \end{vmatrix}}{3} = \frac{-6z + z}{3} = \frac{-5z}{3} \end{aligned}$$

Cuando el sistema es compatible indeterminado su solución es:
$$\begin{cases} x = \frac{-4\lambda}{3} \\ y = \frac{-5\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA 2. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$, $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano

$\pi: x + m y + z = 2$ que depende del parámetro real m . Se pide:

- La posición relativa de las rectas r y s . (4 puntos)
- El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π . (3 puntos)
- Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m = 2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2, 2, 2)$. (3 puntos)

Solución:

a) ¿Posición relativa de r y s ?

Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-z=1 \end{cases} \text{ como } \{\text{menor de } y \text{ y } z\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \text{ despejamos } z \text{ e } y \text{ en función de } x.$$

$$\begin{cases} y=1-x \\ -z=1-2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ z=-1+2x \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{Por tanto: } r: \begin{cases} P_r(0, 1, -1) \\ \vec{v}_r(1, -1, 2) \end{cases}$$

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} \rightarrow s: \begin{cases} P_s(1, 0, 0) \\ \vec{v}_s(1, -1, 2) \end{cases}$$

Como ambos vectores directores son iguales, las rectas son paralelas. Falta determinar si son o no coincidentes.

$$\text{Estudiamos la matriz } \left[\begin{array}{cc|c} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \overrightarrow{P_r P_s} \end{array} \right], \text{ es decir: } M' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Como las rectas son paralelas, $\text{ran}(M) = 1$

Rango de M' , $\{M' \text{ es } 3 \times 3, \text{ luego máximo rango de } M \text{ es } 3\}$.

Como las dos primeras columnas son iguales sabemos que $\text{ran}(M')$ es, como máximo, 2

$$\text{El menor: } \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M') = 2$$

Como $\text{ran}(M) \neq \text{ran}(M') = 2$, las rectas r y s son paralelas no coincidentes.

b) ¿ m / recta $r \subset$ plano π ?

Si $r \subset \pi$, al sustituir los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano, esta debe cumplirse para cualquier valor de λ .

$$\lambda + m(1-\lambda) + (-1+2\lambda) = 2 \quad (\text{en esta ecuación la incógnita es } \lambda)$$

$$\lambda + m - m\lambda - 1 + 2\lambda = 2$$

$$\lambda - m\lambda + 2\lambda = 2 + 1 - m$$

$$3\lambda - m\lambda = 3 - m$$

$$(3-m)\lambda = 3-m$$

Esta ecuación se cumplirá para cualquier valor de λ cuando $3-m=0$, es decir $m=3$

Otra forma de resolverlo es:

Si $r \subset \pi$, el vector director de la recta y el normal del plano serán perpendiculares.

$$\vec{v}_r(1, -1, 2) \text{ y } \vec{n}_\pi(1, m, 1). \quad \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$$

$$(1, -1, 2) \cdot (1, m, 1) = 1 - m + 2 = 3 - m$$

$$3 - m = 0; \quad m = 3.$$

Y ahora comprobemos que para este valor de m la recta está contenida en el plano.

$$¿ \lambda + 3(1 - \lambda) + (-1 + 2\lambda) = 2 ?; \quad \lambda + 3 - 3\lambda - 1 + 2\lambda = 2; \quad 2 = 2 \text{ Sí}$$

En conclusión, para que la recta r esté contenida en el plano π debe ser $m = 3$.

c) Para $m = 2$, el plano $\pi: x + 2y + z = 2$

Corte del plano con los ejes coordenados:

$$A = \text{Eje } OX \cap \pi$$

$$\text{Ecuación del eje } OX: \begin{cases} \text{punto } (0,0,0) \\ \vec{v} (1,0,0) \end{cases} \rightarrow OX: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación de π ,

$$\lambda + 2 \cdot 0 + 0 = 2; \quad \lambda = 2 \rightarrow A(2, 0, 0)$$

$$B = \text{Eje } OY \cap \pi$$

$$\text{Ecuación del eje } OY: \begin{cases} \text{punto } (0,0,0) \\ \vec{v} (0,1,0) \end{cases} \rightarrow OY: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación de π ,

$$0 + 2 \cdot \lambda + 0 = 2; \quad 2\lambda = 2; \quad \lambda = 1 \rightarrow B(0, 1, 0)$$

$$C = \text{Eje } OZ \cap \pi$$

$$\text{Ecuación del eje } OZ: \begin{cases} \text{punto } (0,0,0) \\ \vec{v} (0,0,1) \end{cases} \rightarrow OZ: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación de π ,

$$0 + 2 \cdot 0 + \lambda = 2; \quad \lambda = 2 \rightarrow C(0, 0, 2)$$

Volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2, 2, 2)$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AP}(0, 2, 2) \\ \overrightarrow{BP}(2, 1, 2) \\ \overrightarrow{CP}(2, 2, 0) \end{array} \right\} \rightarrow V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |8 + 8 - 4| = 2 u^3$$

Solución: $A(2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ y el volumen del tetraedro de vértices A, B, C , y P es $2 u^3$.

PROBLEMA 3. Se considera la función $f(x) = x e^{1-x^2}$, calculad:

- El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. (4 puntos)
- Las asíntotas y la gráfica de f . (3 puntos)
- La integral $\int f(x) dx$. (3 puntos)

Solución:

a) $f(x) = x e^{1-x^2}$
 $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$.

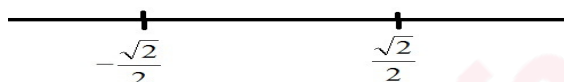
Monotonía.

$$f'(x) = e^{1-x^2} + x e^{1-x^2} (-2x) = e^{-x^2} (1 - 2x^2)$$

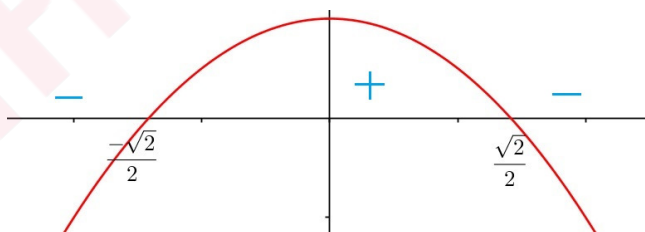
Estudiamos el signo de $f'(x)$,

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^{1-x^2} (1 - 2x^2) = 0 \begin{cases} e^{1-x^2} = 0 & \text{sin solución} \\ (1 - 2x^2) = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos:



En $f'(x)$ el factor e^{1-x^2} es siempre positivo y el factor $(1 - 2x^2)$ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces las obtenidas, por tanto:



Luego, $f(x)$ es creciente en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y decreciente en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Del estudio de la monotonía de $f(x)$ deducimos que hay un máximo relativo en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y un mínimo

relativo en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}e}{2} \rightarrow \text{Máximo relativo } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}e}{2}\right) \cong (0.7071, 1.1658)$$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}e}{2} \rightarrow \text{Mínimo relativo } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}e}{2}\right) \cong (-0.7071, -1.1658)$$

b) Asíntotas y gráfica de $y = f(x)$

$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$, por tanto no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{1-x^2}) = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{x^2-1}} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = (\text{aplicando L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2x e^{x^2-1}} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{1-x^2}) = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^{x^2-1}} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = (\text{aplicando L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2x e^{x^2-1}} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por lo que la **asíntota horizontal** es $y = 0$.

Asíntota oblicua.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x e^{1-x^2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{1-x^2}) = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x e^{1-x^2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-x^2}) = e^{-\infty} = 0$$

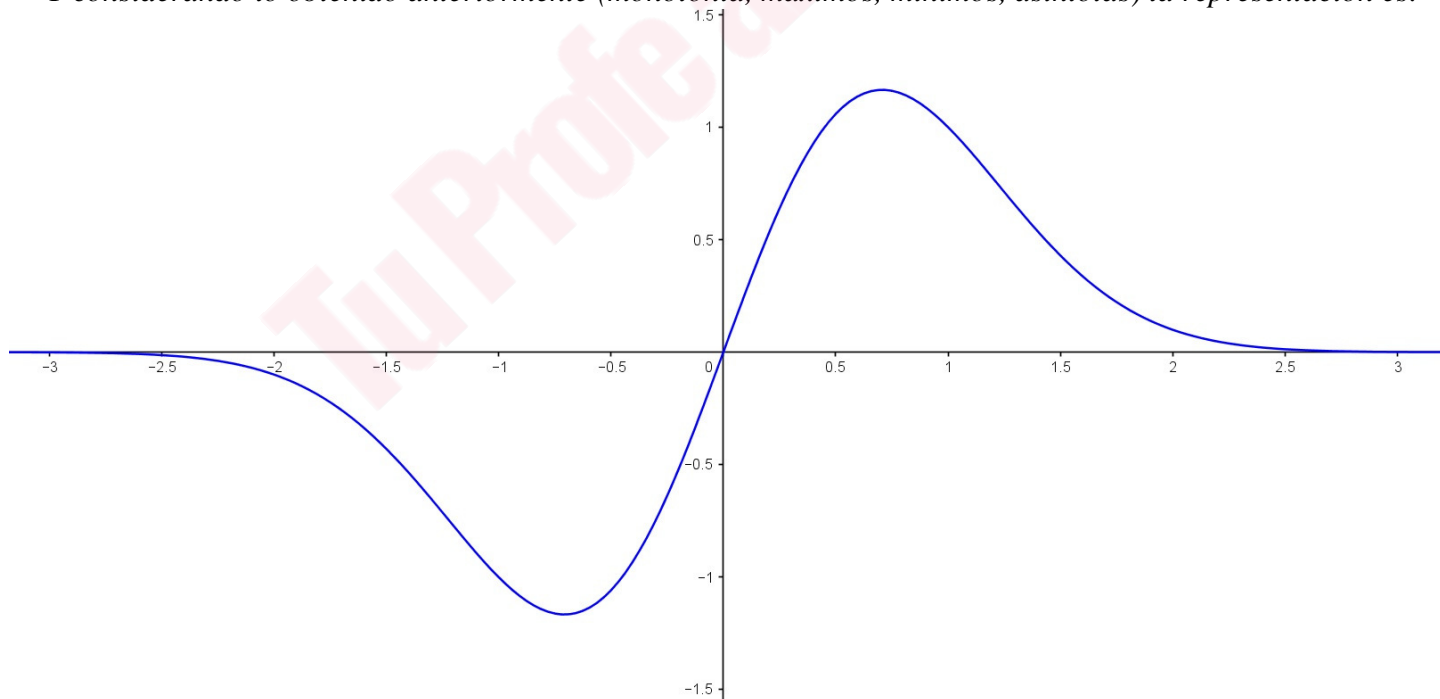
Por lo que no tiene **asíntota oblicua**.

Representación gráfica.

Obtengamos sus puntos de corte con los ejes coordenados,

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \rightarrow y=0 \cdot e^{1-0^2} = 0 \\ y=0 \rightarrow x \cdot e^{1-x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ e^{1-x^2}=0 \text{ sin solución} \end{cases} \end{array} \right\} \text{pto. corte } (0,0)$$

Y considerando lo obtenido anteriormente (monotonía, máximos, mínimos, asíntotas) la representación es:



c)

$$\int f(x) dx = \int x e^{l-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = l - x^2 \\ dt = -2x dx \rightarrow \frac{dt}{-2} = x dx \end{array} \right\} = \int e^t \frac{dt}{-2} = \frac{-1}{2} \int e^t dt =$$

$$= \frac{-1}{2} e^t + C = \frac{-1}{2} e^{l-x^2} + C$$

$$\text{Luego } \int f(x) dx = \frac{-1}{2} e^{l-x^2} + C$$

Tu Profe al Rescate

Problema 4. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3)$. Obtened:

- a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a . (3 puntos)
 b) Una matriz C tal que $A C = 16 I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$. (4 puntos)

- c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución. (3 puntos)

Solución:

a) ¿ $\text{ran}(A)$ en función de a ?

Estudiemos $|A|$,

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2 & 3 \end{vmatrix} = C_3 - 3x C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & a & 4 \\ 1 & a^2 - 2 & 0 \end{vmatrix} = \text{desarrollando por la 3ª columna} = \\ &= -4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a^2 - 2 \end{vmatrix} = -4(a^2 - 2 - 2) = -4(a^2 - 4) \\ &= -4(a^2 - 4) = 0; \quad a^2 - 4 = 0; \quad a^2 = 4; \quad a = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\text{Si } a \neq -2 \text{ y } 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

Si $a = -2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{sabemos que } |A| = 0 \\ \text{como } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \end{array}$$

Si $a = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{sabemos que } |A| = 0 \\ \text{como } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \end{array}$$

Finalmente,

Si $a \neq -2$ y 2 , $\text{ran}(A) = 3$

Si $a = -2$ o $a = 2$, $\text{ran}(A) = 2$

b) ¿ C ? $A C = 16 I$ para $a = 0$.

Como $a = 0$ ($a \neq -2$ y 2), $\text{ran}(A) = 3$ y existe A^{-1} .

$$\text{Sabemos que } |A| = -4(a^2 - 4) \rightarrow |A|_{a=0} = [-4(a^2 - 4)]_{a=0} = -4(0^2 - 4) = 16$$

Calculemos A^{-1} ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -12 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 12 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Obtengamos la matriz C .

$A C = 16 I$, multiplicando por la izquierda por A^{-1} ,
 $A^{-1} A C = A^{-1} 16 I$; $I C = 16 A^{-1} I$; $C = 16 A^{-1} I$

Luego $C = 16 \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. **Solución:** $C = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

c) Rango de B

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

En esta matriz $F_2 = -F_1$ y $F_3 = 2 \cdot F_1$, tiene una sola fila linealmente independiente, luego $\text{ran}(B) = 1$.

¿El sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución?

La matriz ampliada de este sistema es: $M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{array} \right)$

En esta matriz también se cumple que $F_2 = -F_1$ y $F_3 = 2 \cdot F_1$, tiene una sola fila linealmente independiente, luego $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 1 < n^\circ$ de incógnitas. Por tanto el sistema es compatible indeterminado.

Luego, el sistema planteado tiene solución.

Aunque no se pide, la solución del sistema sería:

De la primera ecuación despejamos x : $x = 1 - 2y - 3z \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2\lambda - 3\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

PROBLEMA 5. Dados los puntos $P(1, 1, 0)$, $Q(2, -1, 1)$ y $R(\alpha, 3, -1)$ se pide:

- La ecuación del plano que contiene a P , Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas. (3 puntos)
- La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q . (4 puntos)
- Los valores de α para los cuales P , Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene. (3 puntos)

Solución:

- a) ¿plano π que contiene los puntos P , Q y R para $\alpha = 1$?

$P(1, 1, 0)$, $Q(2, -1, 1)$ y $R(1, 3, -1)$

Del plano π conocemos $\begin{cases} \text{punto } P(1, 1, 0) \\ \text{vectores directores } \begin{cases} \overrightarrow{PQ}(1, -2, 1) \\ \overrightarrow{PR}(0, 2, -1) \end{cases} \end{cases}$

La ecuación del plano π será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad F_3 + F_2 \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y-1+2z=0 \rightarrow y+2z-1=0$$

Por tanto, la ecuación del plano π : $y + 2z - 1 = 0$

¿Distancia del plano π al origen de coordenadas $O(0,0,0)$?

$$d(O, \pi) = \frac{|0 + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ u.l.} \approx 0.4472 \text{ u.l.}$$

- b) ¿recta r / $R \in r$ y $r \parallel s$ { P y $Q \in s$ }?

$$\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ}(1, -2, 1) \rightarrow \text{como } r \parallel s \rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_s \rightarrow \vec{v}_r(1, -2, 1)$$

De la recta r : $\begin{cases} \text{Punto } R(1, 3, -1) \\ \vec{v}_r(1, -2, 1) \end{cases}$

$$\text{Por tanto, } r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

¿ $d(r, s)$?

$$\text{Como } r \parallel s \rightarrow d(r, s) = d(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|}$$

$$\begin{matrix} P_r = R(1, 3, -1) \\ P_s = (1, 1, 0) \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{P_r P_s} = (0, -2, 1) \end{matrix} \right.$$

$$\vec{v}_s = (1, -2, 1) \rightarrow |\vec{v}_s| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{j} + 2\vec{k} = (0, 1, 2)$$

$$|\overrightarrow{P_r P_s} \times \overrightarrow{v_s}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{Finalmente, } d(r,s) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cong 0'9129 \text{ u.l.}$$

c) ¿ α /P, Q y R estén alineados?

P, Q y R están alineados cuando $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{PR}$

$P(1, 1, 0)$, $Q(2, -1, 1)$ y $R(\alpha, 3, -1)$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}(1, -2, 1) \\ \overrightarrow{PR}(\alpha - 1, 2, -1) \end{array} \right\} \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{PR} \rightarrow \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1} \rightarrow \frac{1}{\alpha - 1} = -1; \quad 1 = -\alpha + 1; \quad \alpha = 0$$

Para este valor de α , la ecuación de la recta que contiene a P, Q y R es:

{escogiendo como punto P y como vector director $\overrightarrow{PQ}$ }

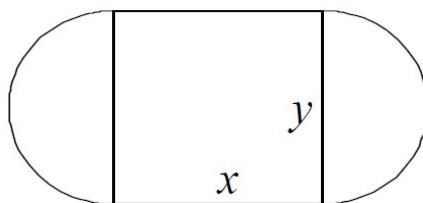
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Solución: P, Q y R estén alineados cuando $\alpha = 0$ y

la ecuación de la recta que los contiene es $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}.$

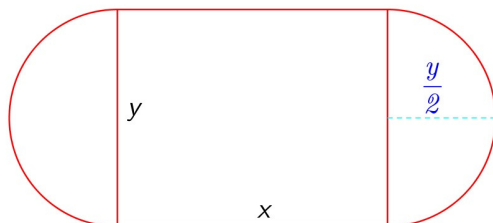
PROBLEMA 6. Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $(4 + \pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

- Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo. (5 puntos)
- Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima. (5 puntos)



Solución:

El campo es:



un rectángulo de dimensiones x e y y dos semicircunferencias de radio $y/2$.
Su superficie es de $(4 + \pi) m^2$.

a) La longitud de las rayas a pintar será:

Perímetro del rectángulo: $2x + 2y$

Perímetro de una semicircunferencia: $\pi y/2$

Las dos semicircunferencias: $2 \pi y/2 = \pi y$

Por tanto: $L = 2x + 2y + \pi y$

Para poder expresar L en función de y , hay que buscar la relación entre x e y .

La relación la obtendremos a partir del valor de la superficie del campo.

El campo está formado por un rectángulo y dos semicírculos,

- rectángulo de lados x e $y \rightarrow A_R = xy$

- dos semicírculos de radio $y/2 \rightarrow A_{SC} = (1/2) \pi (y/2)^2 = (1/2) \pi (y^2/4) = \pi y^2/8$

el área de los dos semicírculos será: $2 \pi y^2/8 = \pi y^2/4$

Superficie del campo $= xy + \frac{\pi}{4} y^2$. Luego $xy + \frac{\pi}{4} y^2 = 4 + \pi$ despejemos x

$$xy = 4 + \pi - \frac{\pi}{4} y^2 \rightarrow x = \frac{4 + \pi - \frac{\pi}{4} y^2}{y}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } L &= 2 \left(\frac{4 + \pi - \frac{\pi}{4} y^2}{y} \right) + 2y + \pi y = \frac{8 + 2\pi - \frac{\pi}{2} y^2}{y} + 2y + \pi y = \frac{8}{y} + \frac{2\pi}{y} - \frac{\pi}{2} y + 2y + \pi y \\ &= \frac{8 + 2\pi}{y} + 2y + \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) y = \frac{8 + 2\pi}{y} + 2y + \frac{\pi}{2} y \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } L = \frac{8 + 2\pi}{y} + 2y + \frac{\pi}{2} y$$

b) ¿Dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima?

Debemos minimizar L . Como y es la longitud de un lado, por definición, $y \geq 0$.

$$L = \frac{8+2\pi}{y} + 2y + \frac{\pi}{2}y$$

$$L' = \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$L' = 0 \rightarrow \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + 2 + \frac{\pi}{2} = 0; \quad 2 + \frac{\pi}{2} = \frac{8+2\pi}{y^2}; \quad \frac{4+\pi}{2} = \frac{8+2\pi}{y^2}; \quad y^2 = \frac{16+4\pi}{4+\pi};$$

$$y^2 = \frac{4(4+\pi)}{4+\pi}; \quad y^2 = 4; \quad y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Como $y \geq 0$, la solución obtenida es $y = 2$. Ahora podemos estudiar el signo de L' en los intervalos $(0,2)$ y $(2,+\infty)$ o calcular L'' . Calculemos L'' .

Reescribimos la expresión de L' ,

$$L' = \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + 2 + \frac{\pi}{2} = -(8+2\pi)y^{-2} + 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$L'' = -(8+2\pi)(-2)y^{-3} = (16+4\pi)y^{-3} = \frac{16+4\pi}{y^3}$$

$$\text{Para } y = 2, \quad L'' = \frac{16+4\pi}{2^3} > 0$$

Por tanto en $y = 2$ hay un mínimo relativo (el único extremo obtenido). Este mínimo relativo es el absoluto de L porque a la izquierda de 2 L es decreciente y a la derecha creciente.

$$y = 2 \rightarrow x = \frac{4 + \pi - \frac{\pi}{4}2^2}{2} = \frac{4 + \pi - \pi}{2} = 2$$

Solución: para que la pintura usada sea mínima las dimensiones del campo son la parte central un cuadrado de lado 2 m ($x = y = 2$) y las semicircunferencias laterales de radio 1 m.