

Modelo 6 de 2000

Se aplican el teorema fundamental del cálculo, optimización, distancias, derivabilidad, áreas y sistemas.

Opción A - Ejercicio 1

Por el teorema fundamental del cálculo, $F'(x) = 2x + \sqrt{x}$. Integramos para obtener F :

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt = \left[t^2 + \frac{2}{3}t^{3/2} \right]_0^x = x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2}.$$

Así,

$$F(1) = \frac{5}{3}.$$

La pendiente de la tangente en $x = 1$ es $F'(1) = 3$. Como el punto de tangencia es $(1, 5/3)$, su ecuación es

$$y - \frac{5}{3} = 3(x - 1).$$

Opción A - Ejercicio 2

Sea r el radio y h la altura del vaso cilíndrico, abierto por arriba. Su capacidad fija el volumen:

$$\pi r^2 h = 250, \quad h = \frac{250}{\pi r^2}.$$

Para minimizar el cristal se minimiza el área de la base más la superficie lateral, $S = \pi r^2 + 2\pi r h$. Al eliminar h :

$$S(r) = \pi r^2 + \frac{500}{r}, \quad r > 0.$$

Buscamos los puntos críticos:

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{500}{r^2} = 0 \implies \pi r^3 = 250.$$

Además, $S''(r) = 2\pi + 1000/r^3 > 0$, por lo que el único punto crítico es un mínimo. Sustituyendo en la condición del volumen resulta $h = r$. Las medidas óptimas son

$$r = h = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \text{ cm}.$$

Opción A - Ejercicio 3

Parametrizamos la recta mediante

$$(x, y, z) = (1, -1, -2) + t(2, 3, 2).$$

Un punto genérico tiene coordenadas $(1 + 2t, -1 + 3t, -2 + 2t)$. Los dos planos tienen normales $(3, 4, 0)$ y $(4, 0, -3)$, ambas de módulo 5. Por tanto, las distancias del punto a los planos son iguales cuando los valores absolutos de sus numeradores coinciden:

$$|3(1 + 2t) + 4(-1 + 3t) - 1| = |4(1 + 2t) - 3(-2 + 2t) - 1|.$$

Esto se reduce a $|18t - 2| = |9 + 2t|$. Resolviendo los dos casos:

$$18t - 2 = 9 + 2t \implies t = \frac{11}{16}, \quad 18t - 2 = -(9 + 2t) \implies t = -\frac{7}{20}.$$

Al sustituir en la recta, los puntos buscados son

$$\left(\frac{19}{8}, \frac{17}{16}, -\frac{5}{8} \right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{3}{10}, -\frac{41}{20}, -\frac{27}{10} \right).$$

Opción A - Ejercicio 4

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_b = \begin{pmatrix} b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}, \quad A_b^* = \begin{pmatrix} b & 1 & b & -2 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es $\det A_b = -(b - 1)(b + 1)$. Si $b \neq \pm 1$, el sistema es SCD. Para $b = 1$, el menor superior izquierdo vale 1, luego $\text{rg}(A_1) = 2$; además, las filas primera y tercera de la ampliada coinciden. Así, $\text{rg}(A_1^*) = 2 < 3$ y el sistema es SCl. De las ecuaciones $x + y + z = -2$ y $y + z = 0$:

$$(x, y, z) = (-2, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $b = -1$, el rango de A_{-1} es 2, pero $R_1 + R_3 = 0$ mientras que sus términos independientes suman -4 . Por tanto, $\text{rg}(A_{-1}^*) = 2 < \text{rg}(A_{-1}) = 3$ y el sistema es SI.

Opción B - Ejercicio 1

Sea $p(x) = x^3/3 - x + 2/3$. En $x = -2$, $p(-2) = 0$, que coincide con el valor de la rama constante; en $x = 1$, $p(1) = 0$, también igual al valor de la rama central. La función es, pues, continua en ambos puntos de unión.

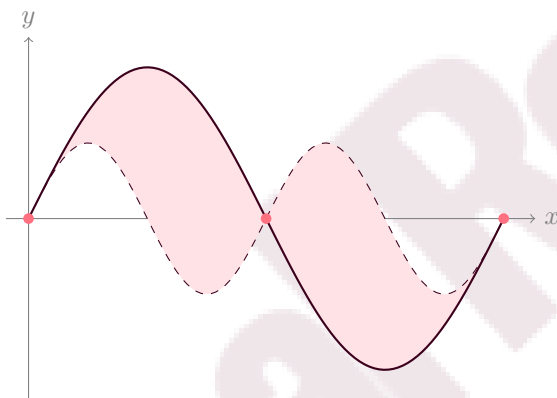
$$p'(x) = x^2 - 1.$$

En $x = -2$, la derivada por la izquierda vale $p'(-2) = 3$, mientras que por la derecha la rama constante tiene derivada 0. No coincide, así que f no es derivable en -2 .

En $x = 1$, la derivada por la izquierda es 0 y por la derecha $p'(1) = 0$. Ambas coinciden, así que f sí es derivable en 1, con $f'(1) = 0$. En el resto de su dominio las ramas son polinómicas o constantes, y por tanto derivables. **Opción B - Ejercicio 2**

Las intersecciones satisfacen $2 \sin x = \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, de modo que $2 \sin x(1 - \cos x) = 0$. En $[0, 2\pi]$ se cortan en $x = 0, \pi, 2\pi$. La diferencia $f - g = 2 \sin x(1 - \cos x)$ es positiva en $(0, \pi)$ y negativa en $(\pi, 2\pi)$; hay dos recintos simétricos. El área total es

$$S = 2 \int_0^\pi (2 \sin x - \sin(2x)) dx = 2 \left[-2 \cos x + \frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^\pi = \boxed{8}.$$



Opción B - Ejercicio 3

Resolvemos las dos ecuaciones que determinan el centro:

$$2x - y = 4, \quad x - 2y = -3 \implies C = \left(\frac{11}{3}, \frac{10}{3}\right).$$

El radio es la distancia del centro a la recta tangente:

$$r = \frac{|x_C - 3y_C + 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

La circunferencia es

$$\left(x - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}.$$

El punto de tangencia es la proyección perpendicular del centro sobre la recta. Para $x - 3y + 3 = 0$, el pie es

$$H = C - \frac{x_C - 3y_C + 3}{10}(1, -3) = \left(4, \frac{7}{3}\right).$$

Opción B - Ejercicio 4

Sean p_M, p_B, p_C los precios por kilogramo de los cafés Moka, Brasil y Colombia. Igualamos el coste total de cada saco con sus 60 kg por el precio de la mezcla:

$$\begin{cases} 15p_M + 30p_B + 15p_C = 240, \\ 30p_M + 10p_B + 20p_C = 270, \\ 12p_M + 18p_B + 30p_C = 282. \end{cases}$$

Dividiendo las ecuaciones por 15, 10 y 6, respectivamente:

$$\begin{cases} p_M + 2p_B + p_C = 16, \\ 3p_M + p_B + 2p_C = 27, \\ 2p_M + 3p_B + 5p_C = 47. \end{cases}$$

Restando tres veces la primera ecuación de la segunda se obtiene $5p_B + p_C = 21$; restando dos veces la primera de la tercera resulta $-p_B + 3p_C = 15$. Resolviendo, $p_C = 6$, $p_B = 3$ y $p_M = 4$. Por tanto,

$$p_M = 4, \quad p_B = 3, \quad p_C = 6 \text{ euros/kg}.$$