

Modelo Septiembre de 2018

Resolución completa de las opciones A y B, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Opción A - Ejercicio 1

Para el tramo de $x > 0$, el desarrollo de Taylor en 0 da $e^x - e^{-x} - 2x = x^3/3 + o(x^3)$ y $x - \sin x = x^3/6 + o(x^3)$; su cociente tiende a 2. La continuidad exige $c = 2$. El máximo relativo en $x = -1$ impone $f'(-1) = 0$, es decir, $-2a + b = 0$. La pendiente en $x = -2$ exige $f'(-2) = -4a + b = 2$. Resolviendo, $a = -1$ y $b = -2$. Como $f''(x) = 2a = -2 < 0$ en el tramo izquierdo, se trata efectivamente de un máximo. Así, $(a, b, c) = (-1, -2, 2)$.

Opción A - Ejercicio 2

Como $x = 1$ es un extremo, $f'(1) = 0$. De $f'(x) = a(\ln x + 1) - b$ se obtiene $b = a$. Una primitiva es

$$F(x) = a \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} \right),$$

tras sustituir $b = a$. Por tanto,

$$\int_1^2 f(x) dx = a \left(2 \ln 2 - \frac{9}{4} \right) = 8 \ln 2 - 9,$$

y resulta $a = 4$, $b = 4$. La función es $f(x) = 4x \ln x - 4x$.

Opción A - Ejercicio 3

Calculamos AB y BA e igualamos sus entradas. La igualdad fuerza $c = -1$, $b = 0$ y $a = 0$; por tanto, las matrices conmutan para $(a, b, c) = (0, 0, -1)$.

La matriz A intercambia la primera y tercera coordenadas y cambia el signo de la segunda. Por ello $A^2 = I$, de modo que las potencias pares son I y las impares son A . En particular,

$$A^2 = I, \quad A^3 = A, \quad A^{2017} = A, \quad A^{2018} = I.$$

Al ser $A^2 = I$, su inversa existe y es $A^{-1} = A$.

Opción A - Ejercicio 4

La recta r tiene el punto $P_0 = (-1, 0, -1)$ y director $\vec{u} = (2, 1, 3)$. La recta s , intersección de planos con normales $(2, -3, 0)$ y $(0, 1, -2)$, tiene director $\vec{v} = (3, 2, 1)$ y pasa por $Q_0 = (-4, -1, 0)$. Los directores no son proporcionales. Al sustituir un punto genérico de r en los dos planos de s , las ecuaciones exigen simultáneamente $t = 3/5$ y no se satisface la otra; por ello no se cortan y son alabeadas.

La distancia entre rectas alabeadas es

$$d(r, s) = \frac{|(Q_0 - P_0) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}.$$

Aquí $\vec{u} \times \vec{v} = (-5, 7, 1)$ y $Q_0 - P_0 = (-3, -1, 1)$, luego $d = 9/\sqrt{75} = 3\sqrt{3}/5$.

Opción B - Ejercicio 1

El dominio es $(0, +\infty)$ por el logaritmo. Los extremos en 1 y 2 son raíces de $f'(x) = a/x + 2bx + 1$. Multiplicando por x , el polinomio $2bx^2 + x + a$ debe tener esas raíces. Por las relaciones de Viète, $1+2 = -1/(2b)$ y $1 \cdot 2 = a/(2b)$, de donde $b = -1/6$ y $a = -2/3$.

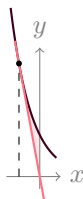
Con estos valores,

$$f'(x) = -\frac{(x-1)(x-2)}{3x}.$$

Como $x > 0$, el signo es negativo en $(0, 1)$, positivo en $(1, 2)$ y negativo en $(2, +\infty)$. Así, $x = 1$ es mínimo relativo y $x = 2$ máximo relativo.

Opción B - Ejercicio 2

La tangente a $f(x) = e^{-2x}$ tiene pendiente $f'(x) = -2e^{-2x}$. Igualamos esta pendiente con la de $y = -2ex$: $e^{-2x} = e$, luego $x = -1/2$ y $y = e$. La región queda entre las curvas desde $x = -1/2$ hasta el eje y ; en ese intervalo la exponencial está por encima de la recta. Su área es



$$S = \int_{-1/2}^0 (e^{-2x} + 2ex) dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + ex^2 \right]_{-1/2}^0 = \boxed{\frac{e-2}{4}}.$$

Opción B - Ejercicio 3

De $y - z = m$ se obtiene $y = z + m$. Al sustituir en la primera y tercera ecuaciones, ambas tienen el mismo lado izquierdo $x + (m+1)z$, pero los términos independientes son $m^2 - m$ y $m - m^2$. Por tanto, el sistema es compatible solo si $m^2 - m = m - m^2$, es decir, $m = 0$ o $m = 1$; para los demás valores es incompatible. Cuando $m = 0$ o $m = 1$, hay una ecuación independiente para x, z y una variable libre, así que es compatible indeterminado.

Para $m = 1$, las ecuaciones se reducen a $x + 2z = 0$ y $y - z = 1$. Si se pide $z = 2$, se obtiene $x = -4$, $y = 3$. Una solución es $\boxed{(-4, 3, 2)}$.

Opción B - Ejercicio 4

Los directores son $\vec{u} = (2, m, 1)$ para r y $\vec{v} = (-n, 1, 1)$ para s . La perpendicularidad requiere $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2n + m + 1 = 0$. Además, un punto de r es $(1 + 2t, -1 + mt, t)$; al imponer que pertenezca a los dos planos de s se obtiene $(n+2)t = -3$ y $(m-1)t = -2$. Resolviendo estas tres condiciones, $\boxed{n = 5/2, m = 4}$.

Para $m = 3, n = 1$, los directores son $(2, 3, 1)$ y $(-1, 1, 1)$, y las rectas se cortan en $(-1, -4, -1)$. Un vector normal del plano es su producto vectorial $(2, -3, 5)$. El plano por el punto de r , $(1, -1, 0)$, queda

$$\boxed{2x - 3y + 5z - 5 = 0}.$$