

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Una pastelería vende dos clases de cajas de bombones. En las cajas denominadas EXTRA incluye 15 bombones de tipo A y 30 de tipo B, mientras que las cajas denominadas DELUXE contienen 30 bombones de tipo A y 15 de tipo B.

Con cada bombón de tipo A obtiene un beneficio de 50 céntimos, y con cada uno de tipo B un beneficio de 40 céntimos. Denominando x al número de cajas EXTRA, e y al número de cajas DELUXE que vende, se pide:

- Calcula la función de beneficios de la pastelería. (2 puntos)
- Si dispone de 450 bombones de cada tipo, calcula el número de cajas x e y que deberá vender de cada clase para obtener un beneficio máximo. (6 puntos)
Calcula dicho beneficio máximo. (2 puntos)

Solución:

Llamando: $x = n^\circ$ de cajas EXTRA

$y = n^\circ$ de cajas DELUXE

Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla:

Tipo de caja	Bombones/caja		nº de cajas
	A	B	
EXTRA	15	30	x
DELUXE	30	15	y
Beneficio/bombón	0'50€	0'40€	

- a) ¿función de beneficios de la pastelería?

Llamando z a la función de beneficios,

$$z = (15x + 30y) 0'5 + (30x + 15y) 0'4 = 7'5x + 15y + 12x + 6y = 19'5x + 21y$$

La función de beneficios de la pastelería es: $z = 19'5x + 21y$

- b) ¿ x , y para que el beneficio sea máximo?

Las restricciones del problema son:

$$\text{"Se dispone de 450 bombones del tipo A"} \rightarrow 15x + 30y \leq 450 \rightarrow x + 2y \leq 30$$

$$\text{"Se dispone de 450 bombones del tipo B"} \rightarrow 30x + 15y \leq 450 \rightarrow 2x + y \leq 30$$

Como las variables x e y representan número de cajas, x e y deben ser números naturales.

El beneficio viene dado por la función: $z = 19'5x + 21y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar } z = 19'5x + 21y$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} x + 2y \leq 30 \\ 2x + y \leq 30 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x + 2y \leq 30$ (b) $2x + y \leq 30$

$x + 2y = 30$

x	y
0	15
30	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 2 \cdot 0 \leq 30$ Sí

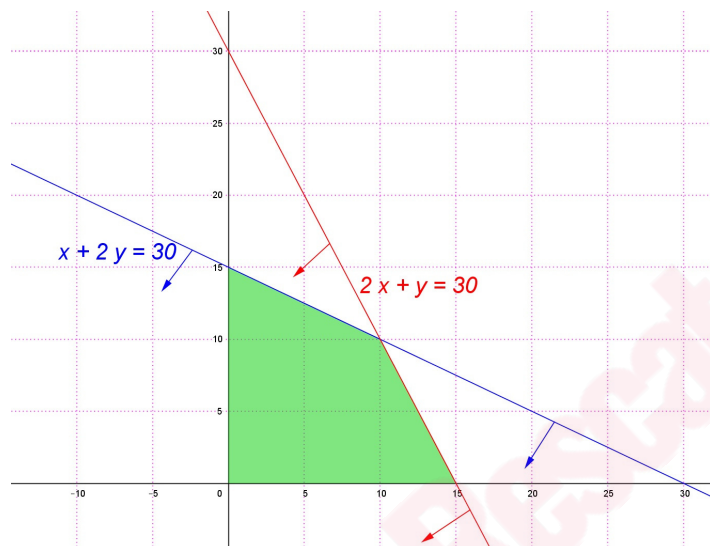
$2x + y = 30$

x	y
0	30
15	0

¿(0,0) cumple?

$2 \cdot 0 + 0 \leq 30$ Sí

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de coordenadas naturales de la zona sombreada.

En los cálculos realizados para representar las restricciones hemos obtenido tres de los cuatro vértices de la región factible. Sólo falta por conocer el del punto de corte de las rectas (a) y (b).

Punto C, corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} x + 2y = 30 \\ 2x + y = 30 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación despejamos x , $x = 30 - 2y$

Sustituyendo el valor de x en la 2ª ecuación: $2(30 - 2y) + y = 30 \rightarrow 60 - 4y + y = 30$

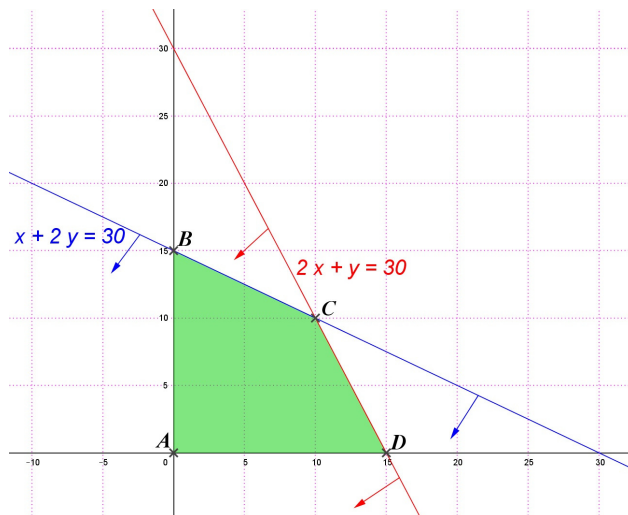
$$60 - 3y = 30 \rightarrow -3y = 30 - 60 \rightarrow -3y = -30 \rightarrow y = 10$$

Y, finalmente, $x = 30 - 2 \cdot 10 = 10$

Luego $C(10, 10)$

Los vértices de la región factible son:

$A(0, 0)$, $B(0, 15)$, $C(10, 10)$ y $D(15, 0)$.



El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 19'5 x + 21 y$	
$0, 0$	$19'5 \cdot 0 + 21 \cdot 0 = 0$	
$0, 15$	$19'5 \cdot 0 + 21 \cdot 15 = 315$	
$10, 10$	$19'5 \cdot 10 + 21 \cdot 10 = 405$	máximo
$15, 0$	$19'5 \cdot 15 + 21 \cdot 0 = 292'5$	

El máximo se alcanza en el punto (10 , 10)

Por tanto, para obtener un beneficio máximo debe vender 10 cajas de bombones EXTRA y otras 10 del tipo DELUXE.

De esta forma el beneficio máximo será de 405€.

Tu Profe al Rescate

OPCIÓN A

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2}$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función. (2 puntos)

Solución:

a) Dominio y puntos de corte.

Dominio:

$$(x-2)^2 = 0 \rightarrow x-2 = 0 \rightarrow x = 2, \text{ por tanto } \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \sim \{2\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados:

$$x=0 \rightarrow y = \frac{0-1}{(0-2)^2} = \frac{-1}{4} \rightarrow \left(0, \frac{-1}{4}\right)$$

$$y=0 \rightarrow 0 = \frac{x-1}{(x-2)^2} \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow (1, 0)$$

Luego, los puntos de corte con los ejes coordenados son $\left(0, \frac{-1}{4}\right)$ y $(1, 0)$.

b) Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2-4x+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{(x-2)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Por tanto, $y = 0$ es la asíntota horizontal.

Para facilitar la representación gráfica de la función, situemos la curva respecto de la asíntota:

$$\left. \begin{array}{l} \text{En } -\infty, \quad x = -1000 \rightarrow y = \frac{-1000-1}{(-1000-2)^2} = -0'000997... \\ \text{En } +\infty, \quad x = 1000 \rightarrow y = \frac{1000-1}{(1000-2)^2} = 0'001003... \end{array} \right\} \rightarrow \text{--- } y=0 \text{ ---}$$

Asíntota vertical. La posible asíntota vertical es $x = 2$, veamoslo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{(x-2)^2} = \frac{2-1}{(2-2)^2} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

Para facilitar la representación gráfica de la función, situemos la curva respecto de la asíntota:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{(x-2)^2} = \frac{1'9-1}{(1'9-2)^2} = \frac{+}{+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{(x-2)^2} = \frac{2'1-1}{(2'1-2)^2} = \frac{+}{+} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{--- } x=2 \text{ ---}$$

c) Monotonía.

Debemos estudiar el signo de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-2)^2 - (x-1)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{1 \cdot (x-2) - (x-1)2}{(x-2)^3} = \frac{x-2-2x+2}{(x-2)^3} = \frac{-x}{(x-2)^3}$$

Para estudiar el signo de $f'(x)$ calculemos las raíces del numerador y denominador:

$$0 - x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$(x-2)^3 = 0 \rightarrow x-2 = 0 \rightarrow x = 2 (\notin \text{Dom } f(x))$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos:

x	$f'(x)$
-1	$\frac{-(-1)}{(-1-2)^3} = -$
1	$\frac{-1}{(1-2)^3} = +$
3	$\frac{-3}{(3-2)^3} = -$

Luego, el signo de $f'(x)$ es:

Es decir: $f(x)$ es creciente en $(0, 2)$ y decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

d) Máximos y mínimos locales

Del estudio realizado en el apartado anterior obtenemos:

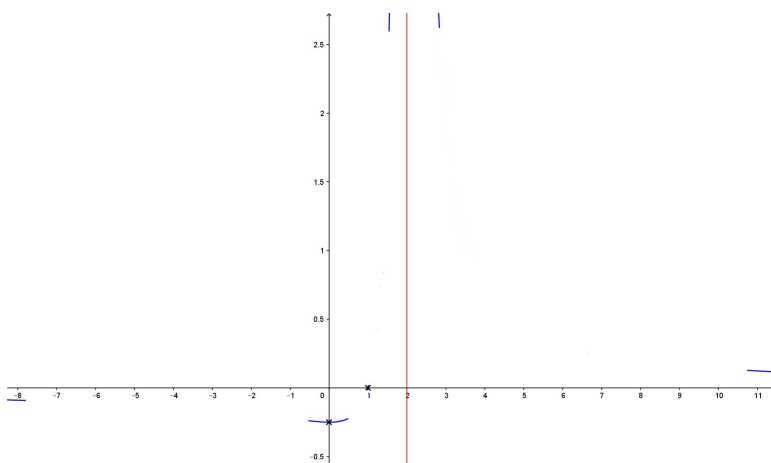
Hay un mínimo local en $x = 0$, (en $x = 2$ no hay nada porque no es del dominio de la función)

Como calculamos en el apartado a) para $x = 0$ $f(0) = \frac{-1}{4}$

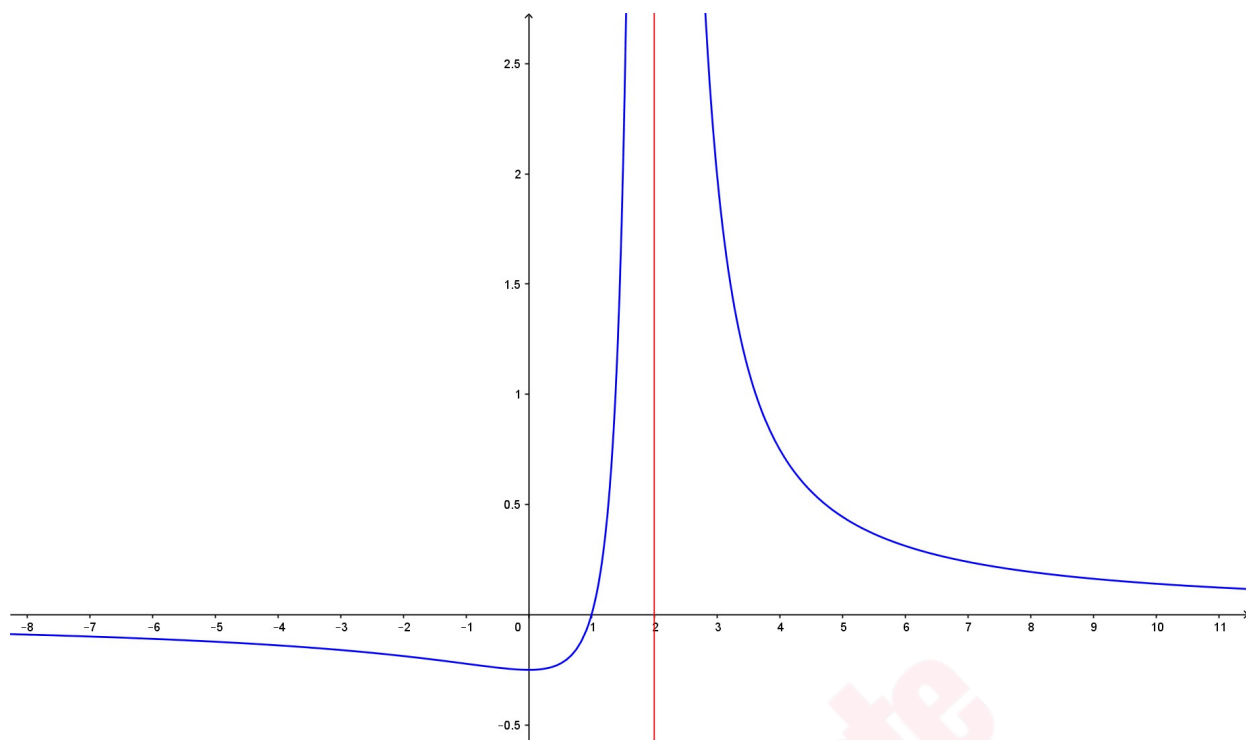
Es decir, $f(x)$ tiene un mínimo local en $\left(0, \frac{-1}{4}\right)$.

e) Representación gráfica de $f(x)$

Situando en los ejes coordenados los puntos de corte, las asíntotas y el mínimo relativo obtenidos en los apartados anteriores,



Teniendo en cuenta la monotonía vista en el apartado c), la representación gráfica será:



Tu Profe al Rescate

OPCIÓN A

Problema 3. En un estudio realizado en un comercio se ha determinado que el 68% de las compras se pagan con tarjeta de crédito. El 15% de las compras superan los 500 € y ambas circunstancias (una compra supera los 500 € y se paga con tarjeta de crédito) se da el 5% de las veces. Calcula la probabilidad de que:

- a) Una compra no supere los 500 € y se pague en efectivo. (3 puntos)
- b) Una compra no pase de 500 € si no se ha pagado con tarjeta de crédito. (4 puntos)
- c) Una compra se pague con tarjeta de crédito si no ha superado los 500 €. (3 puntos)

Solución:

Consideremos los siguientes sucesos:

T = pagar con tarjeta de crédito

$\bar{T}$ = pagar en efectivo

D = la compra supera los 500€

$\bar{D}$ = la compra no supera los 500€

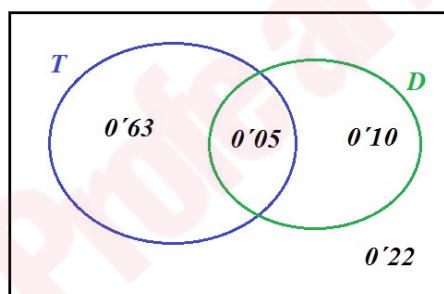
De los datos del problema obtenemos:

“un comercio se ha determinado que el 68% de las compras se pagan con tarjeta de crédito” $\rightarrow P(T) = 0.68$

“el 15% de las compras superan los 500 €” $\rightarrow P(D) = 0.15$

“ambas circunstancias (una compra supera los 500 € y se paga con tarjeta de crédito) se da el 5% de las veces” $\rightarrow P(T \cap D) = 0.05$

El diagrama de sucesos es:



$$0.63 + 0.05 = 0.68$$

$$0.05 + 0.10 = 0.15$$

$$1 - (0.63 + 0.05 + 0.10) = 0.22$$

- a) Probabilidad de que una compra no supere los 500 € y se pague en efectivo.

Se pide $P(\bar{D} \cap \bar{T}) = (\text{según el diagrama}) = 0.22$

Otra forma:

$$\begin{aligned} P(\bar{D} \cap \bar{T}) &= (\text{por leyes de Morgan}) = P(\overline{D \cup T}) = 1 - P(D \cup T) = 1 - [P(D) + P(T) - P(D \cap T)] = \\ &= 1 - [0.15 + 0.68 - 0.05] = 0.22 \end{aligned}$$

Luego, la probabilidad de que una compra no supere los 500 € y se pague en efectivo es 0.22

- b) Probabilidad de que una compra no pase de 500 € si no se ha pagado con tarjeta de crédito

$$\text{Se pide } P\left(\frac{\bar{D}}{\bar{T}}\right) = \frac{P(\bar{D} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0.22}{1 - 0.68} = \frac{0.22}{0.32} = 0.6875$$

Por tanto, la probabilidad de que una compra no pase de 500 € si no se ha pagado con tarjeta de crédito es 0'6875

c) Probabilidad de que una compra se pague con tarjeta de crédito si no ha superado los 500 €

$$\text{Se pide } P\left(\frac{T}{\overline{D}}\right) = \frac{P(T \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0'63}{0'85} = 0'7412$$

Cálculo de las probabilidades de la fracción:

➤ Por el diagrama de sucesos se obtienen directamente ambas probabilidades.

➤ Por propiedades de las probabilidades:

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0'15 = 0'85 \quad (\text{probabilidad del suceso contrario})$$

El cálculo de $P(T \cap \overline{D})$ lo realizamos de la siguiente forma:

$$\overline{D} = \overline{D} \cap E = \overline{D} \cap (T \cup \overline{T}) = (\overline{D} \cap T) \cup (\overline{D} \cap \overline{T}),$$

$$\text{como } (\overline{D} \cap T) \cap (\overline{D} \cap \overline{T}) = \overline{D} \cap T \cap \overline{T} = \emptyset \rightarrow$$

$$P(\overline{D}) = P((\overline{D} \cap T) \cup (\overline{D} \cap \overline{T})) = P(\overline{D} \cap T) + P(\overline{D} \cap \overline{T})$$

$$0'85 = P(\overline{D} \cap T) + 0'22 \rightarrow P(\overline{D} \cap T) = 0'85 - 0'22 = 0'63$$

Por tanto, la probabilidad de que una compra se pague con tarjeta de crédito si no ha superado los 500 € es 0'7412

Problema 1. Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Calcula A^{-1} . (5 puntos)
 b) Calcula una matriz X , de orden 3×3 , que cumpla $A X = C$. (5 puntos)

Solución:

a) Cálculo de A^{-1} .

$$\text{Calculamos } |A|, \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 15 + 10 - 25 + 4 + 9 = 19$$

Como $|A| \neq 0 \rightarrow$ existe A^{-1} . Procedamos a su cálculo,

$$A \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 19 & -2 \\ -8 & -19 & 7 \\ -3 & -19 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 5 & -19 & -2 \\ 8 & -19 & -7 \\ -3 & 19 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/19 & 8/19 & -3/19 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2/19 & -7/19 & 5/19 \end{pmatrix}$$

b) ¿Matriz X ? / $A X = C$

Como existe A^{-1} , multiplicando por la izquierda por A^{-1} , $A^{-1} A X = A^{-1} C$

Como $A^{-1} A = I$, $I X = A^{-1} C \rightarrow X = A^{-1} C$

Procedamos al cálculo de X ,

$$X = \begin{pmatrix} 5/19 & 8/19 & -3/19 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2/19 & -7/19 & 5/19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35+8-24}{19} & \frac{35+8-24}{19} & \frac{35+8-24}{19} \\ -7-1+8 & -4+1+4 & -1-4+6 \\ \frac{-14-7+40}{19} & \frac{-8+7+20}{19} & \frac{-2-28+30}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2. La caída de un meteorito en la Antártida provocó el deshielo de una superficie con una extensión en km^2 que viene dada por $f(t) = \frac{10t + 21}{t + 3}$, siendo t el número de días transcurridos desde el impacto.

- a) ¿Cuál fue la superficie deshelada después de 6 días del impacto? ¿Y después de 87 días? (2 puntos)
- b) Estudia si la superficie deshelada crece o decrece a lo largo del tiempo. (3 puntos)
- c) Otro científico afirmó que la superficie deshelada venía dada por la función

$$g(t) = 10 - \frac{9}{t + 3}$$

Comprueba si hay o no diferencias entre las dos funciones $f(t)$ y $g(t)$. (2 puntos)

- d) ¿Tiene algún límite la extensión del deshielo? (3 puntos)

Solución:

a) Después de 6 días

$$t = 6 \rightarrow f(6) = \frac{10 \cdot 6 + 21}{6 + 3} = 9$$

Después de 6 días del impacto la superficie deshelada fue de 9 km^2 .

Después de 87 días

$$t = 87 \rightarrow f(87) = \frac{10 \cdot 87 + 21}{87 + 3} = 9,9$$

Después de 87 días del impacto la superficie deshelada fue de $9,9 \text{ km}^2$.

b) Estudiemos el crecimiento-decrecimiento de $f(t)$, $t \geq 0$.

$$f'(t) = \frac{10(t+3) - (10t+21)1}{(t+3)^2} = \frac{10t+30-10t-21}{(t+3)^2} = \frac{9}{(t+3)^2}$$

Por tanto $f'(t)$ para $t > 0$ es siempre positiva (numerador positivo y denominador, elevado al cuadrado, también positivo). Luego $f(t)$ es creciente para $t > 0$.

En conclusión, la superficie deshelada crece a lo largo del tiempo.

c) Comparemos las funciones $f(t)$ y $g(t)$.

$$\begin{aligned} f(t) - g(t) &= \frac{10t+21}{t+3} - \left(10 - \frac{9}{t+3}\right) = \frac{10t+21}{t+3} - 10 + \frac{9}{t+3} = \frac{10t+21-10(t+3)+9}{t+3} = \frac{10t+21-10t-30+9}{t+3} = \\ &= \frac{0}{t+3} = 0 \end{aligned}$$

Es decir, las funciones $f(t)$ y $g(t)$ son iguales.

d) Para comprobar si tiene algún límite la extensión del deshielo calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{10t+21}{t+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{10t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 10 = 10$$

Por tanto, el límite de la extensión del deshielo está en 10 km^2 .

Problema 3. En una casa hay tres llaveros. El primer llavero (AZUL) tiene 5 llaves. El segundo (ROJO) tiene 4 llaves y el tercero (VERDE) tiene 3 llaves. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar uno de los llaveros. Se pide:

- Calcula la probabilidad de abrir el trastero con la primera llave que se prueba del llavero escogido. (3 puntos)
- Si se abre el trastero con la primera llave que se prueba, ¿cuál es la probabilidad de que se haya escogido el llavero VERDE? (4 puntos)
- ¿Cuál es la probabilidad de que la primera llave que se prueba del llavero escogido al azar no abra y sí que lo haga una segunda (distinta de la anterior) que se prueba del mismo llavero? (3 puntos)

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

A = escoger el llavero azul

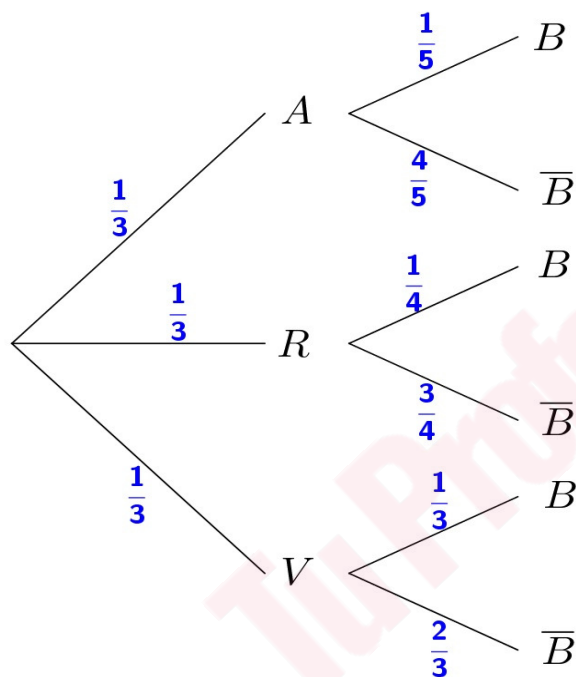
R = escoger el llavero rojo

V = escoger el llavero verde

B = la llave abre

$\bar{B}$ = la llave no abre

Considerando todos los datos del enunciado, el árbol del problema será:



a) Probabilidad de abrir el trastero con la primera llave que se prueba del llavero escogido:

$$P(B) = P(A) P(B|A) + P(R) P(B|R) + P(V) P(B|V) = \frac{1}{3} \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \frac{1}{3} = \frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} = \frac{47}{180} = 0'2611$$

La probabilidad de abrir el trastero con la primera llave que se prueba del llavero escogido es 0'2611

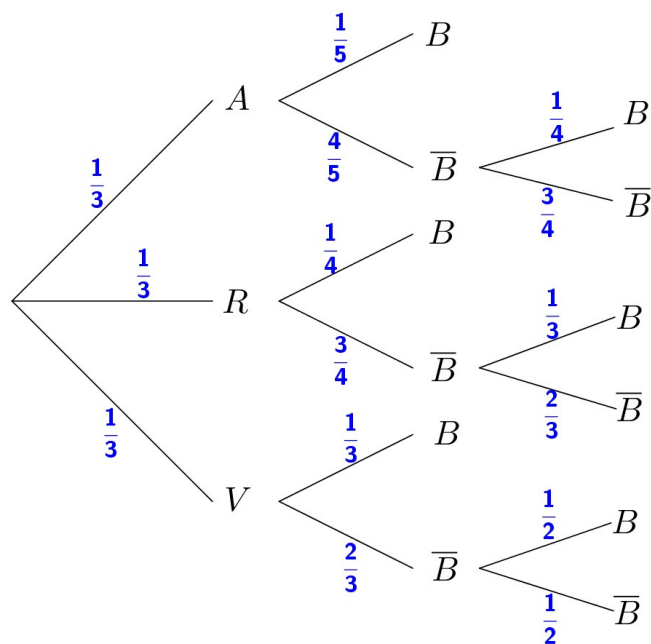
b) Si se abre el trastero con la primera llave que se prueba, ¿cuál es la probabilidad de que se haya escogido el llavero VERDE?

$$\text{Se pide } P(V|B) = \frac{P(V \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \frac{1}{3}}{\frac{47}{180}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{47}{180}} = \frac{20}{47} = 0'4255$$

Si se abre el trastero con la primera llave que se prueba, la probabilidad de que se haya escogido el llavero VERDE es 0'4255

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera llave que se prueba del llavero escogido al azar no abra y sí que lo haga una segunda (distinta de la anterior) que se prueba del mismo llavero?

El árbol del problema, ahora, es el siguiente:



Hay que calcular $P(I^a \text{ llave no abre y } 2^a \text{ llave si}) = P(I^a \bar{B} \cap 2^a B)$

$$P(I^a \bar{B} \cap 2^a B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} = \frac{47}{180} = 0.2611$$

La probabilidad de que la primera llave que se prueba del llavero escogido al azar no abra y sí que lo haga una segunda (distinta de la anterior) que se prueba del mismo llavero es 0.2611